Report 解析力学 JS0.5

J Simplicity

February 4, 2012

J Simplicity HOME

http://www.jsimplicity.com/

Preface

解析力学は，ニュートン力学を形式的に捉えなおし，2 つの形式で表現される理論です．1 つはラグランジアン形式であり，もう 1 つはハミルトニアン形式です．どちらもニュートン力学と等価であることが理解されています．これらの形式により，物理学が量子力学，場の量子論へと進化したとき，柔軟に対応することができました．この 2 つの形式のエッセンスを見ていくことにしましょう．

Contents

I　解析力学の成立 **4**

1　ラグランジアン形式 **5**

1.1　一般化座標 5

1.2　ラグランジアン 6

1.3　ハミルトンの原理（変分原理） 7

1.4　オイラー-ラグランジュ方程式 9

2　ハミルトニアン形式 **11**

2.1　一般化運動量 11

2.2　ハミルトニアン 12

2.3　ハミルトン正準方程式 13

Part I

解析力学の成立

Chapter 1

ラグランジアン形式

1.1　一般化座標

通常，デカルト座標においては，1 つの質点の座標ベクトルは，

$$\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

で表されます．(t) は，座標ベクトルとその成分が，時間の関数で，時間とともに変化することを示しています．この座標を他の座標系で表すことができます．例えば，球面座標では次のようになります．

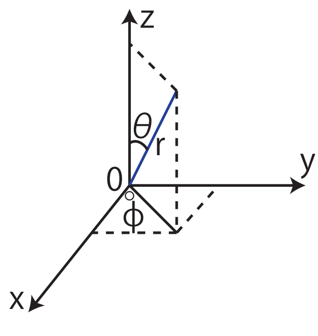

Figure 1.1: 球面座標

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \sin\theta(t) \cos\phi(t) \\ y(t) &= r(t) \sin\theta(t) \sin\phi(t) \\ z(t) &= r(t) \cos\theta(t) \end{aligned}$$

この場合，$(r(t), \theta(t), \phi(t))$ で座標を表すことになります．このような様々な座標を一般化して，

$$(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

とおくことにします．この座標を一般化座標といいます．このとき，デカルト座標での座標ベクトルと一般化座標は，次のように一般的に関係付けられます．

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

ここで，N 個の質点から構成される質点系を取り扱ってみましょう．この場合の自由度，すなわち座標の数は，$f = 3N$ です．故に，一般化座標は，

$$(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t))$$

と拡張されます．例えば，i 番目 $(i = 1, 2, \cdots, N)$ の質点のデカルト座標での座標ベクトル $\boldsymbol{x}_i(t)$ を，一般化座標で表すと，

$$\boldsymbol{x}_i(t) = \boldsymbol{x}_i(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t)) \tag{1.1}$$

となります．このとき，座標ベクトルの時間微分は，

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t) = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{x}_i(t)}{\partial q_j(t)} \dot{q}_j(t) \tag{1.2}$$

です．ただし，ドットは時間の常微分を示します．

1.2 ラグランジアン

N 質点系を取り扱う際，系全体を記述する量として，次のラグランジアン L という物理量を定義します．

$$L \equiv T - V$$

ここで，T は系全体の運動エネルギー，V は系全体のポテンシャルです．すなわち，

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i^2$$

$$V = V(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N)$$

です．(1.1) 式と (1.2) 式より，T と V は一般化座標を用いて，次のように表されます．

$$T = T(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots, \dot{q}_f(t))$$

$$V = V(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t))$$

したがって，ラグランジアンは一般化座標を用いて，次のように表されます．

$$L = L(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots, \dot{q}_f(t)) = L(q(t), \dot{q}(t))$$

ここで，$q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots, \dot{q}_f(t)$ は $2f$ 個の独立した変数です．また，最右辺の式は，変数を簡略化して表したものです．

1.3 ハミルトンの原理（変分原理）

光がレンズなどの媒質に入射して屈折する際，屈折の法則が成立します．と同時に，実はもう 1 つ別の原理が成立しています．それは，光が進行するときに，最小の時間で済む経路を選択するというものです．これをフェルマーの原理といいます．光は，すなわち自然は，最小の時間で済む経路を知っているのです．この原理を力学に拡張しましょう．まず，N 質点系について時間が t_A から t_B へ経過するとき，次の作用と呼ばれる物理量 $S(q(t), \dot{q}(t))$ を，系を記述するラグランジアンから定義します．

$$S(q(t), \dot{q}(t)) \equiv \int_{t_A}^{t_B} dt\, L(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots, \dot{q}_f(t))$$

このとき，N 個の質点からなる系全体は，作用 $S(q(t), \dot{q}(t))$ が最小になるように運動します．自然はこのことを知っているのです．この原理のことを，最小作用の原理といいます．

　最小作用の原理を実際に数学的に表現するためには，ハミルトンの原理（変分原理）といわれる原理を使います．作用 $S(q(t), \dot{q}(t))$ は $q_j(t), \dot{q}_j(t)\,(j = 1, 2, \cdots, f)$ の関数になっていますが，$q_j(t), \dot{q}_j(t)$ はそれぞれ時間の関数です．関数の関数のことを汎関数といいます．この場合，関数 $q_j(t), \dot{q}_j(t)$ の関数である作用 $S(q(t), \dot{q}(t))$ が汎関数です．ハミルトンの原理（変分原理）とは，

原理 1.1 (ハミルトンの原理（変分原理）) “ 汎関数である作用 $S(q(t), \dot{q}(t))$ が，最大または最小の停留値をとるような運動が実現します． ”

という原理です．作用 $S(q(t), \dot{q}(t))$ が最小値をとるような運動が実現するということは，最小作用の原理にほかなりません．単なる関数の極値を求める問題は微分により解くことができますね．これに対して，関数の関数である汎関数が停留値をとる問題を解くには変分といわれるものを使います．

　図に示しているように，時刻 t_A と時刻 t_B における座標は固定しています．そして，その間の座標の変化をある関数 $q_j(t)\,(j = 1, 2, \cdots, f)$ で表します．（時間微分は，$\dot{q}_j(t)$ です．）この場合の作用 S は，

$$S(q(t), \dot{q}(t)) = \int_{t_A}^{t_B} dt\, L(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots, \dot{q}_f(t))$$

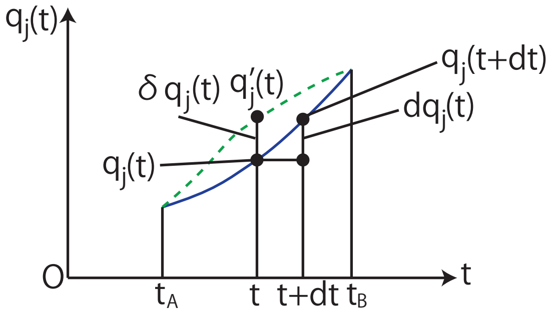

Figure 1.2: ハミルトンの原理（変分原理）

です．次に時刻 t_A と時刻 t_B における座標値は変えずに，その途中の座標の値を少しだけ変えて，軌道を図の破線のようにして，その関数を $q'_j(t)$ とします.（時間微分の関数は，$\dot{q}'_j(t)$ とします.）$q_j(t), \dot{q}_j(t)$ の関数形を変えたのです． この場合の作用 $S'(q'(t), \dot{q}'(t))$ は，

$$S'(q(t)', \dot{q}'(t)) = \int_{t_A}^{t_B} dt\, L(q'_1(t), q'_2(t), \cdots, q'_f(t), \dot{q}'_1(t), \dot{q}'_2(t), \cdots, \dot{q}'_f(t))$$

となります． $q_j(t), \dot{q}_j(t)$ の変化を，

$$\delta q_j(t) = q'_j(t) - q_j(t)$$
$$\delta \dot{q}_j(t) = \dot{q}'_j(t) - \dot{q}_j(t)$$

と表しておきます.（図を見て下さい.）関数の微小差 $\delta q_j(t)$ を変分といいます.（同一関数の時間変化に対する値の差である微分，

$$dq_j(t) = q_j(t + dt) - q_j(t)$$

との違いに注意して下さい.（図を見て下さい.)）変分をとったときの作用の変化 $\delta S(q(t), \dot{q}(t))$ は，

$$\delta S(q(t), \dot{q}(t)) = S'(q'(t), \dot{q}'(t)) - S(q(t), \dot{q}(t))$$

と表せます． ハミルトンの原理（変分原理）は，

$$\delta S(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

を要求します．これは，関数の微小な変化，つまり変分 $\delta q_j(t), \delta \dot{q}_j(t)$ に対して，作用 $S(q(t), \dot{q}(t))$ が値を変えない，つまり停留値をとっていることを意味しています． この条件を満たすように，質点系の運動は決定されるのです．

1.4 オイラー-ラグランジュ方程式

前 Section のハミルトンの原理（変分原理）より，ラグランジアン形式の基礎方程式を導出しましょう．以下のように，$\delta S(q(t),\dot{q}(t))$ を計算していきます．

$$\begin{aligned}
\delta S(q(t),\dot{q}(t)) &= S'(q'(t),\dot{q}'(t)) - S(q(t),\dot{q}(t)) \\
&= \int_{t_A}^{t_B} dt\, L(q_1'(t),\cdots,q_f'(t),\dot{q}_1'(t),\cdots,\dot{q}_f'(t)) - \int_{t_A}^{t_B} dt\, L(q_1(t),\cdots,q_f(t),\dot{q}_1(t),\cdots,\dot{q}_f(t)) \\
&= \int_{t_A}^{t_B} dt\, L(q_1(t)+\delta q_1(t),\cdots,q_f(t)+\delta q_f(t),\dot{q}_1(t)+\delta\dot{q}_1(t),\cdots,\dot{q}_f(t)+\delta\dot{q}_f(t)) \\
&\quad - \int_{t_A}^{t_B} dt\, L(q_1(t),\cdots,q_f(t),\dot{q}_1(t),\cdots,\dot{q}_f(t)) \\
&= \int_{t_A}^{t_B} dt\{L(q_1(t),\cdots,q_f(t),\dot{q}_1(t),\cdots,\dot{q}_f(t)) + (\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_1(t)}\delta q_1(t) + \cdots + \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_f(t)}\delta q_f(t) \\
&\quad + \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_1(t)}\delta\dot{q}_1(t) + \cdots + \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_f(t)}\delta\dot{q}_f(t)) + \cdots\} \\
&\quad - \int_{t_A}^{t_B} dt\, L(q_1(t),\cdots,q_f(t),\dot{q}_1(t),\cdots,\dot{q}_f(t)) \\
&\cong \int_{t_A}^{t_B} dt(\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_1(t)}\delta q_1(t) + \cdots + \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_f(t)}\delta q_f(t) \\
&\quad + \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_1(t)}\delta\dot{q}_1(t) + \cdots + \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_f(t)}\delta\dot{q}_f(t))
\end{aligned}$$

最後の変形では，2 次の微小量は省略しました．また，

$$\begin{aligned}
\delta\dot{q}_j(t) &= \delta(\frac{dq_j(t)}{dt}) \\
&= \frac{dq_j'(t)}{dt} - \frac{dq_j(t)}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(q_j'(t) - q_j(t)) \\
&= \frac{d}{dt}\delta q_j(t)
\end{aligned}$$

が成立します．計算を続けます．

$$\begin{aligned}
\delta S(q(t),\dot{q}(t)) &= \int_{t_A}^{t_B} dt(\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_1(t)}\delta q_1(t) + \cdots + \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_f(t)}\delta q_f(t) \\
&\quad + \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_1(t)}\frac{d}{dt}\delta q_1(t) + \cdots + \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_f(t)}\frac{d}{dt}\delta q_f(t)) \\
&= \int_{t_A}^{t_B} dt(\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_1(t)}\delta q_1(t) + \cdots + \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_f(t)}\delta q_f(t)) \\
&\quad + [\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_1(t)}\delta q_1(t)]_{t_A}^{t_B} - \int_{t_A}^{t_B} dt\{\frac{d}{dt}(\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_1(t)})\delta q_1(t)\} \\
&\quad + \cdots + [\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_f(t)}\delta q_f(t)]_{t_A}^{t_B} - \int_{t_A}^{t_B} dt\{\frac{d}{dt}(\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_f(t)})\delta q_f(t)\}
\end{aligned}$$

最後の変形には部分積分を使いました．ここで，始点と終点は固定されているので，

$$\delta q_1(t_A) = \cdots = \delta q_f(t_A) = q_1(t_B) = \cdots = \delta q_f(t_B) = 0$$

です．故に，

$$\begin{aligned}\delta S\,(q(t),\dot{q}(t)) &= \int_{t_A}^{t_B} dt\{\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_1(t)} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_1(t)})\}\delta q_1(t) + \cdots \\ &+ \int_{t_A}^{t_B} dt\{\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_f(t)} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_f(t)})\}\delta q_f(t)\end{aligned}$$

となります．ここで，ハミルトンの原理より，

$$\delta S\,(q(t),\dot{q}(t)) = 0$$

ですので，

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_j(t)}) - \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_j(t)} = 0\,(j = 1, 2, \cdots, f)} \tag{1.3}$$

が成立します．この (1.3) 式をオイラー-ラグランジュ方程式といいます．ラグランジアン形式の中心となる方程式です．

ここで，1 質点の場合，確かにオイラー-ラグランジュ方程式からニュートンの運動方程式が導かれることを確認しておきましょう．一般化座標としてデカルト座標 $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ をとり，質点の質量を m，ポテンシャルを $V(\boldsymbol{x}(t))$ とします．このとき，ラグランジアン $L(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)) = T(\dot{\boldsymbol{x}}(t)) - V(\boldsymbol{x}(t))$ は，

$$L(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)) - V(x(t), y(t), z(t))$$

です．$x(t)$ 成分について調べると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))}{\partial \dot{x}(t)} &= m\dot{x}(t) \\ \therefore \frac{d}{dt}(\frac{\partial L(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))}{\partial \dot{x}(t)}) &= m\ddot{x}(t)\end{aligned}$$

となり，また，

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))}{\partial x(t)} = -\frac{\partial V(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x(t)}$$

であるので，オイラー-ラグランジュ方程式 (1.3) 式は，

$$m\ddot{x}(t) - (-\frac{\partial V(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x(t)}) = 0$$

$$\therefore m\ddot{x}(t) = F_x(t)$$

となります．確かに運動方程式が導かれました．$y(t)$ 成分と $z(t)$ 成分についても同様です．

Chapter 2

ハミルトニアン形式

2.1　一般化運動量

この Chapter では，解析力学のもう 1 つの形式であるハミルトニアン形式を取り扱います．"ラグランジアン形式" の Chapter より，ラグランジアンは $2f$ 個の変数の関数でした．（f は自由度で，N 粒子系の場合は $f = 3N$ です．）

$$L = L(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots, \dot{q}_f(t)) = L(q(t), \dot{q}(t))$$

最右辺の式は，変数を簡略化して表したものです．ラグランジアンはオイラー-ラグランジュ方程式，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_j(t)}\right) - \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q_j(t)} = 0 \, (j = 1, 2, \cdots, f) \tag{2.1}$$

を満たします．このオイラー-ラグランジュ方程式 (2.1) 式の中にも現れる次の量を，一般化運動量 $p_j(t) \, (j = 1, 2, \cdots, f)$ として定義します．

$$p_j(t) \equiv \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_j(t)} \tag{2.2}$$

　デカルト座標の場合，この一般化運動量が通常の意味での運動量と一致することを確認しておきましょう．運動エネルギーを $T(\dot{\boldsymbol{x}}(t))$，ポテンシャルを $V(\boldsymbol{x}(t))$ として，1 質点のラグランジアン $L(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)) = T(\dot{\boldsymbol{x}}(t)) - V(\boldsymbol{x}(t))$ は，

$$L(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)) - V(x(t), y(t), z(t))$$

ですから，(2.2) 式より，機械的に $x(t)$ 成分の一般化運動量を計算すると，

$$\begin{aligned} p_x(t) &= \frac{\partial L(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t))}{\partial \dot{x}(t)} \\ &= m\dot{x}(t) \end{aligned}$$

となり，確かに通常の運動量になりますね．$y(t)$ 成分と $z(t)$ 成分についても同様です．

2.2 ハミルトニアン

系を記述する物理量として，全力学的エネルギー，

$$H \equiv T + V$$

を，ハミルトニアン H として定義します．ここで，T は運動エネルギー，V はポテンシャルです．さらに，一般化してハミルトニアン H を，

$$H \equiv \sum_{j=1}^{f} p_j(t)\dot{q}_j(t) - L(q(t), \dot{q}(t)) \tag{2.3}$$

と定義しなおします．特別に，1 質点についてデカルト座標を考えると，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{f} p_j(t)\dot{q}_j(t) &= m\dot{x}^2(t) + m\dot{y}^2(t) + m\dot{z}^2(t) \\ &= 2T(q(t), \dot{q}(t))\end{aligned}$$

となりますので，確かに，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{f} p_j(t)\dot{q}_j(t) - L(q(t), \dot{q}(t)) &= 2T(q(t), \dot{q}(t)) - (T(q(t), \dot{q}(t)) - V(q(t))) \\ &= T(q(t), \dot{q}(t)) + V(q(t))\end{aligned}$$

であることがわかります．(2.3) 式のハミルトニアンの定義は，1 質点についてデカルト座標の場合を含んでいることがわかります．(2.3) 式が，最も一般的なハミルトニアンの定義式です．

ハミルトニアン (2.3) 式の右辺は，$q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots, \dot{q}_f(t)$ と，$p_1(t), p_2(t), \cdots, p_f(t)$ の変数からなりますが，ここで，(2.2) 式の関係より，$\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots, \dot{q}_f(t)$ を $p_1(t), p_2(t), \cdots, p_f(t)$ で表すことにします．このとき，ハミルトニアン H は，$q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t), p_1(t), p_2(t), \cdots, p_f(t)$ の $2f$ 個の変数をもちます．すなわち，

$$H = H(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t), p_1(t), p_2(t), \cdots, p_f(t)) = H(q(t), p(t))$$

です．最右辺の式は，変数を簡略化して書いたものです．独立した $2f$ 個の変数，

$$q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t), p_1(t), p_2(t), \cdots, p_f(t)$$

を正準変数といいます．

2.3 ハミルトン正準方程式

ハミルトニアンの満たす運動方程式を導出しましょう．いま，正準変数 $q_j(t), p_j(t)$ についいて変分をとります．すなわち，

$$q_j(t) \to q_j(t) + \delta q_j(t)$$

$$p_j(t) \to p_j(t) + \delta p_j(t)$$

とします．このとき，$\dot{q}_j(t)$ は $q_j(t), p_j(t)$ の関数になりますので，2 次の変分を無視して，

$$\dot{q}_j(t) \to \dot{q}_j(t) + \sum_{k=1}^{f}(\frac{\partial \dot{q}_j(t)}{\partial q_k(t)}\delta q_k(t) + \frac{\partial \dot{q}_j(t)}{\partial p_k(t)}\delta p_k(t))$$

のように変化します．さて，ハミルトニアンについては，2 次の変分を無視して，

$$H(q(t)+\delta q(t), p(t)+\delta p(t)) \cong H(q(t), p(t)) + \sum_{j=1}^{f}(\frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial q_j(t)}\delta q_j(t) + \frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial p_j(t)}\delta p_j(t)) \quad (2.4)$$

となります．一方，ハミルトニアンの定義 (2.3) 式より，

$$\begin{aligned}
H(q(t) + \delta q(t), p(t) + \delta p(t)) \cong& \sum_{j=1}^{f}[(p_j(t) + \delta p_j(t))\{\dot{q}_j(t) + \sum_{k=1}^{f}(\frac{\partial \dot{q}_j(t)}{\partial q_k(t)}\delta q_k(t) + \frac{\partial \dot{q}_j(t)}{\partial p_k(t)}\delta p_k(t))\}] - L(q(t), \dot{q}(t)) \\
&- \sum_{j=1}^{f}\{\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q_j(t)}\delta q_j(t) + \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_j(t)}\sum_{k=1}^{f}(\frac{\partial \dot{q}_j(t)}{\partial q_k(t)}\delta q_k(t) + \frac{\partial \dot{q}_j(t)}{\partial p_k(t)}\delta p_k(t))\} \\
\cong& \sum_{j=1}^{f} p_j(t)\dot{q}_j(t) - L(q(t), \dot{q}(t)) + \sum_{j=1}^{f} \dot{q}_j(t)\delta p_j(t) \\
&+ \sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f} p_j(t)(\frac{\partial \dot{q}_j(t)}{\partial q_k(t)}\delta q_k(t) + \frac{\partial \dot{q}_j(t)}{\partial p_k(t)}\delta p_k(t)) \\
&- \sum_{j=1}^{f}\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q_j(t)}\delta q_j(t) - \sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f} p_j(t)(\frac{\partial \dot{q}_j(t)}{\partial q_k(t)}\delta q_k(t) + \frac{\partial \dot{q}_j(t)}{\partial p_k(t)}\delta p_k(t))
\end{aligned}$$

最後の変形においては，2 次の変分を無視し，一般化運動量の定義 (2.2) を使いました．さらに，計算を続けます．

$$\begin{aligned}
H(q(t) + \delta q(t), p(t) + \delta p(t)) &= H(q(t), p(t)) + \sum_{j=1}^{f}(-\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q_j(t)}\delta q_j(t) + \dot{q}_j(t)\delta p_j(t)) \\
&= H(q(t), p(t)) + \sum_{j=1}^{f}\{-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_j(t)})\delta q_j(t) + \dot{q}_j(t)\delta p_j(t)\}
\end{aligned}$$

ですから，

$$H(q(t) + \delta q(t), p(t) + \delta p(t)) = H(q(t), p(t)) + \sum_{j=1}^{f}(-\dot{p}_j(t)\delta q_j(t) + \dot{q}_j(t)\delta p_j(t)) \quad (2.5)$$

となります．ここで，ハミルトニアンの定義式 (2.3) 式，オイラー-ラグランジュ方程式 (2.1) 式と，一般化運動量の定義 (2.2) 式を使いました．(2.4) 式と (2.5) 式を比較して，

$$\boxed{\frac{dq_j(t)}{dt} = \frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial p_j(t)}} \tag{2.6}$$

と，

$$\boxed{\frac{dp_j(t)}{dt} = -\frac{\partial H(q(t), p(t))}{\partial q_j(t)}} \tag{2.7}$$

を得ます．(2.6) 式と (2.7) 式をハミルトン正準方程式といいます．ハミルトニアン形式で中心的な働きをする方程式です．

ここで，1 質点の場合，確かにハミルトン正準方程式からニュートンの運動方程式が導かれることを確認しておきましょう．一般化座標としてデカルト座標 $\boldsymbol{x} = (x(t), y(t), z(t))$ をとり，質点の質量を m，ポテンシャルを $V(\boldsymbol{x}(t))$ とします．このとき，ハミルトニアン $H(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}(t)) = T(\boldsymbol{p}(t)) + V(\boldsymbol{x}(t))$ は，

$$H(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}(t)) = \frac{1}{2m}(p_x^2(t) + p_y^2(t) + p_z^2(t)) + V(x(t), y(t), z(t))$$

で与えられます.（座標と運動量でハミルトニアンを記述していることに注意します.）$x(t)$ 成分について調べると，ハミルトン正準方程式の第 1 式，(2.6) 式より，

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{\partial H(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}(t))}{\partial p_x(t)} \\ &= \frac{p_x(t)}{m} \end{aligned}$$

となります．この式は運動量の定義式と一致します．また，ハミルトン正準方程式の第 2 式，(2.7) 式より，

$$\begin{aligned} \frac{dp_x(t)}{dt} &= -\frac{\partial H(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}(t))}{\partial x(t)} \\ &= -\frac{\partial V(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x(t)} \end{aligned}$$

となります．よって，

$$\frac{dp_x(t)}{dt} = F_x(t)$$

となり，ニュートンの運動方程式が再現されることが確認されました．$y(t)$ 成分と $z(t)$ 成分についても同様です．