Report 力学 JS0.5

J Simplicity

February 4, 2012

J Simplicity HOME

http://www.jsimplicity.com/

Preface

力学は今から 300 年以上前に，ガリレイとニュートンによって創られました．力学の始まりをもって，物理学が創始されたといってよいでしょう．力学は他の物理学の雛型となるものです．多くの経験および実験事実をもとに法則が帰納され，その法則から演繹された多くの事実が，また実験によって検証されるというパターンは，物理学の典型的な模範となるものです．

力学は力学的自然観とも呼べるものを形成していました．これは絶対時間，絶対空間の中で，微分方程式によって記述される事象が因果律に従う決定論的な振る舞いをするというものです．絶対時間，絶対空間は相対性理論によって否定され，決定論は量子力学の確率的因果律によって取って代わられる運命にありました．力学および力学的自然観は２０世紀の物理学の革命によって破綻したのです．しかしながら，現在でも，力学は古典的な理論として物理学の中で確固とした礎を築いていることは間違いのないところです．

Contents

Part I

力学の成立

Chapter 1

運動

1.1　等速直線運動と等加速度直線運動

力学は，物体の運動，あるいは物体にはたらく力，エネルギー等について取り扱います．この Chapter では，運動について見ていくことにします．

最初に，簡単のため直線運動を見ていくことにしましょう．直線上を動いた距離，あるいは移動距離を $\ell[m]$ で表します．移動距離は，大きさだけの量，すなわちスカラーですが，向きを加えた物理量を変位 $x[m]$ といいます．変位は，最初の位置から最後の位置を結んだ矢印で表すことができます．変位は，大きさと向きを持った量，ベクトルです．直線上を一方方向に運動する場合は，問題ありませんが，U ターンする運動の場合は注意が必要です．途中の経路と関係なく，この場合も，最初の位置と最後の位置を結んだ矢印が変位になります．

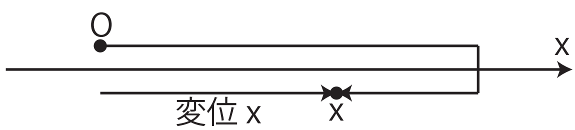


Figure 1.1: 変位 1

運動を表す速さという物理量を，単位時間当たりの移動距離で定義します．

定義 1.1 (直線運動の平均の速さ)

$$v \equiv \frac{\ell}{t}$$

ただし，$t[s]$ 間に $\ell[m]$ 進んだ場合を考えました．速さは定義される物理量です．定義とは約束という言葉で言い直すことも可能です．何故，速さが単位時間当たりの移動距離なのかという理由は，そのように定義されたから，約束されたからということです．速さを定義すると運動を取り扱うことができるのです．速さを定義しなければ，その先に進むことができません．全ての物理量は定義されます．物理学とは定義された物理量の間の関係を方程式で表した法則や原理を明らかにしていく学問だと言えるでしょう．速さは，大きさだけの量，すなわちスカラーですが，速さに向きを加えたベクトルの物理量を速度 $v[m/s]$ といいます.（速さと同じ文字を使います.）速度の定義は，単位時間当たりの変位です.

定義 1.2 (直線運動の平均の速度 1)

$$v \equiv \frac{x}{t}$$

ただし，$t[s]$ 間に $x[m]$ 変位した場合を考えました.

最も簡単な運動の状態としては，静止が挙げられますが，これについては特に言及することもないでしょう．次に簡単な運動の状態として，直線運動の中で，一定の速度で運動する等速直線運動が挙げられます．等速直線運動の $v-t$ グラフと，$x-t$ グラフを描い

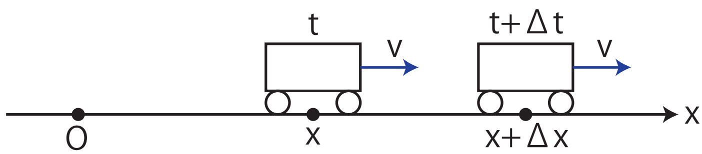


Figure 1.2: 等速直線運動 1

ておきます．$v-t$ グラフの長方形の面積は，移動距離 $\ell[m]$ になり，$x-t$ グラフの直線の

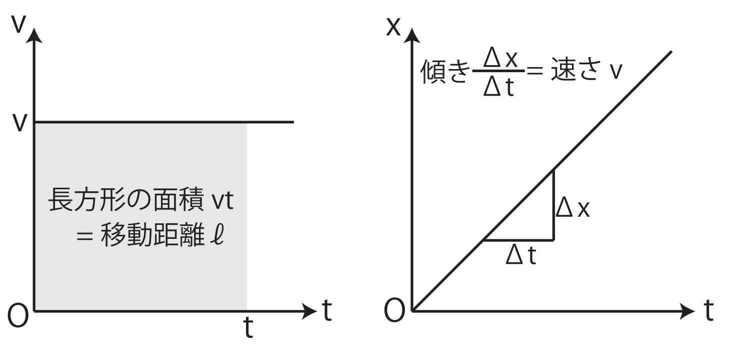


Figure 1.3: 等速直線運動 2

傾きは，速さ $v[m/s]$ になります.

速度が変化する運動を取り扱うためには，速度が時間に対して変化する割合である加速度という物理量を考えます．加速度 $a[m/s^2]$ とは，単位時間当たりの速度の変化量であると定義されます．

定義 1.3 (直線運動の平均の加速度)

$$a \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

ただし，$\Delta t[s]$ の時間の間に対する速度の変化量を $\Delta v[m/s]$ としています．

等速直線運動の次に簡単な運動は，一定の加速度で直線運動する等加速度直線運動です．状況を図に示しておきます．$t = 0[s]$ で，原点を通るときの速度を，初速度 $v_0[m/s]$，

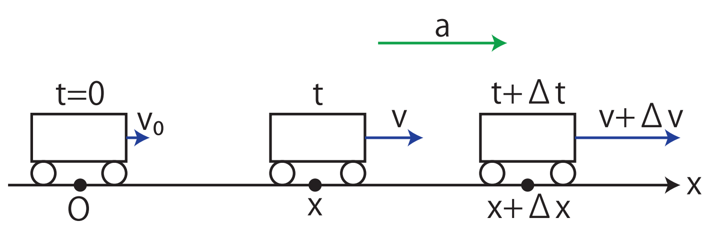


Figure 1.4: 等加速度直線運動 1

一定の加速度を $a[m/s^2]$ としておきます．等加速度直線運動の $v-t$ グラフを描いておきます．図の (a) から，$v-t$ グラフの傾きは，一定の加速度 $a[m/s^2]$ を表すことが理解でき，時

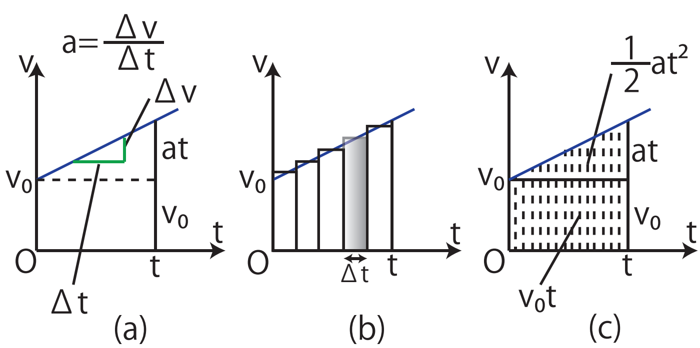


Figure 1.5: 等加速度直線運動 2

間 $t[s]$ における速度 $v[m/s]$ は，

$$v = v_0 + at$$

となることが確認されます．また，図の (b) のように，短い時間間隔 $\Delta t[s]$ で区切っていくと，その間では等速直線運動と近似されますので，長方形の面積の和が移動距離になります．$\Delta t[s]$ を $0[s]$ に近づける極限で，グラフのデコボコはなくなり，移動距離は図の (c) の

ように台形の面積になります．今，考えているような一方方向への直線運動の場合，移動距離は変位 $x[m]$ に一致しますので，変位 $x[m]$ は，

$$x = \int_0^t v \cdot dt$$

と積分を使って表すことができます．この場合は，積分を使わなくても面積は，図の (c) のように簡単に求められます．したがって，

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

が成立します．速度の式と変位の式から，時間を含まない 3 番目の関係式を導くことができます．速度の式より，

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

となります．これを変位の式に代入して計算していきます．

$$x = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a(\frac{v - v_0}{a})^2$$

したがって，

$$\begin{aligned} 2ax &= 2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2 \\ &= 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2 \\ &= v^2 - v_0^2 \end{aligned}$$

となりますので，時間を含まない関係式，

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

が成立します．

1.2 一般の直線運動

x の正の方向に加速度 $a[m/s^2]$ で運動する直線運動を図に示しておきます．図の時間 $\Delta t[s]$ の間の変位は，$\Delta x[m]$ です．さて，$\Delta t[s]$ 間の平均の速度 $v[m/s]$ は次のように表されます．

定義 1.4 (直線運動の平均の速度 2)

$$v \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$\Delta t[s]$ を無限小にする極限をとると，この式の値は瞬間の速度となります．これを改めて $v[m/s]$ とおくと，

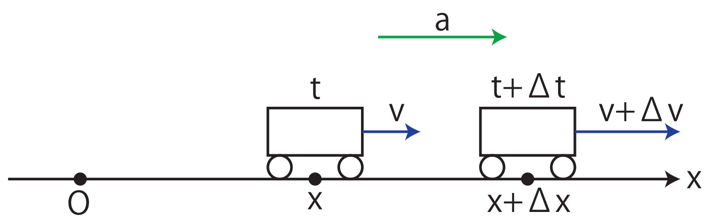


Figure 1.6: 直線運動

定義 1.5 (直線運動の瞬間の速度)

$$v \equiv \frac{dx}{dt}$$

となります．つまり，速度は変位を時間で微分した量です．また，平均の加速度 $a[m/s^2]$ は次のように表されました．

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

ここで，$\Delta v[m/s]$ は $\Delta t[s]$ の間の速度の変化量です．$\Delta t[s]$ を無限小にする極限をとると，この式は瞬間の加速度を表します．これを改めて $a[m/s^2]$ とおくと，

定義 1.6 (直線運動の瞬間の加速度)

$$a \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

となります．したがって，加速度は速度を時間で微分した量，あるいは変位を 2 回時間で微分した量です．

では逆に加速度から速度を，速度から変位を求めてみましょう．まず，加速度から速度を求めてみます．一定の加速度 $a[m/s^2]$ の等加速度直線運動という特別な場合を考えます．

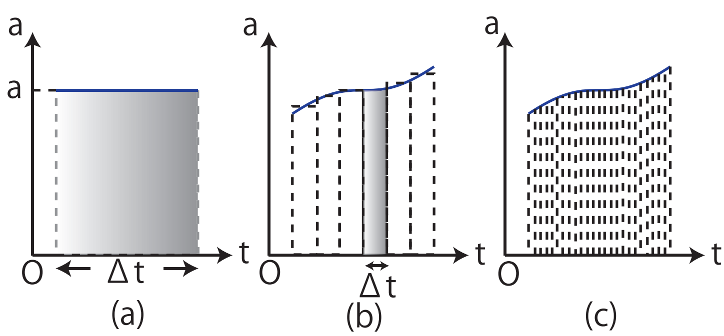


Figure 1.7: 速度

このとき，速度の変化量は $a\Delta t[m/s]$ です．$a-t$ グラフは $a[m/s^2]$ が一定で，t 軸に平行な直線になりますが，速度の変化量はこのグラフの長方形の面積になります．(図 “速度” の

(a) のグラフを参照して下さい.）一般に加速度が変化する場合では，グラフをある短い時間間隔 $\Delta t[s]$ で幾つかの区間に分割します．その区間において加速度の平均値をとり，有限個の長方形をつくります．各区間において速度の変化量は長方形の面積で近似されます．したがって，全体の速度の変化量は長方形の面積の和になります.（図 “速度” の (b) を参照して下さい.）ここで，$\Delta t[s]$ を無限小にする極限をとると，無限個の細長い長方形でグラフは分割され，グラフのでこぼこはなくなり，速度の変化量は無限個の細長い長方形の和になります.（図 “速度” の (c) を参照して下さい.）つまり，加速度が変化する場合でも速度の変化量は $a-t$ グラフの面積であり，これは加速度 $a[m/s^2]$ を時間 $t[s]$ で積分したものです．故に，速度 $v[m/s]$ は積分定数を初速度と考えて，次式で表されます．

$$v = \int a \cdot dt$$

同様に，速度から変位を求めてみましょう．一定の速度 $v[m/s]$ の等速直線運動という特別

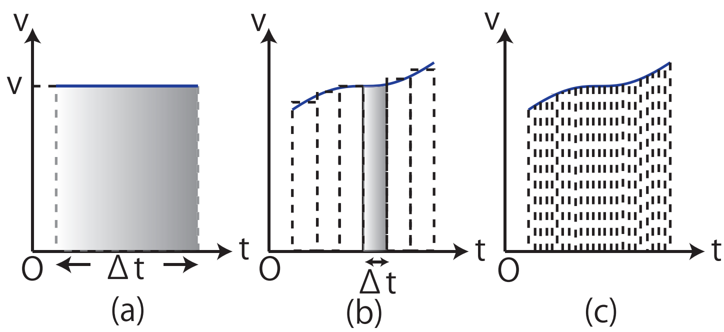


Figure 1.8: 変位 2

な場合を考えます．このとき，変位は $v\Delta t[m]$ です．$v-t$ グラフは $v[m/s]$ が一定で，t 軸に平行な直線になりますが，変位はこのグラフの長方形の面積になります.（図 “変位 2” の (a) のグラフを参照して下さい.）一般に速度が変化する場合では，グラフをある短い時間間隔 $\Delta t[s]$ で幾つかの区間に分割します．その区間において速度の平均値をとり，有限個の長方形をつくります．各区間において変位は長方形の面積で近似されます．したがって，全体の変位は長方形の面積の和になります.（図 “変位 2” の (b) を参照して下さい.）ここで，$\Delta t[s]$ を無限小にする極限をとると，無限個の細長い長方形でグラフは分割され，グラフのでこぼこはなくなり，変位は無限個の細長い長方形の和になります.（図 “変位 2” の (c) を参照して下さい.）つまり，速度が変化する場合でも変位は $v-t$ グラフの面積であり，これは速度 $v[m/s]$ を時間 $t[s]$ で積分したものです．故に，変位 $x[m]$ は次式で表されます．

$$x = \int v \cdot dt$$

等加速度直線運動の場合に成立する関係式を導いておきましょう．ただし，初期条件は $t = 0[s]$ で $v = v_0[m/s], x = 0[m]$ と与えておきます．まず，

$$\frac{dv}{dt} = a$$

の式からスタートします．加速度が一定の場合を考えていますので，$a[m/s^2]$ は定数です．両辺を時間 $t[s]$ で一回積分すると，

$$v = at + C$$

となります.（C は積分定数.）ここで，$t = 0[s]$ で，$v = v_0[m/s]$ の条件を代入すると，

$$v_0 = a \times 0 + C$$
$$\therefore C = v_0[m/s]$$

になります．よって，

$$v = v_0 + at$$

の関係式が成立します．もう一度，両辺を時間 $t[s]$ で積分すると，

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C'$$

となります.（C' は積分定数.）ここで，$t = 0[s]$ で $x = 0[m]$ の条件を代入して，

$$0 = v_0 \times 0 + \frac{1}{2}a \times 0^2 + C'$$
$$\therefore C' = 0$$

です．故に，

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

が成立します．逆に，この式を時間 $t[s]$ で 1 回微分すると，

$$v = v_0 + at$$

が導かれ，さらにもう 1 回時間 $t[s]$ で微分すると，

$$\frac{dv}{dt} = a$$

となることが確かめられます.

1.3 曲線運動

一般の曲線運動を取り扱ってみましょう．状況を図示すると図のようになります．この場合，平均の速度 $\bar{v}[m/s]$ は次のように表されます.

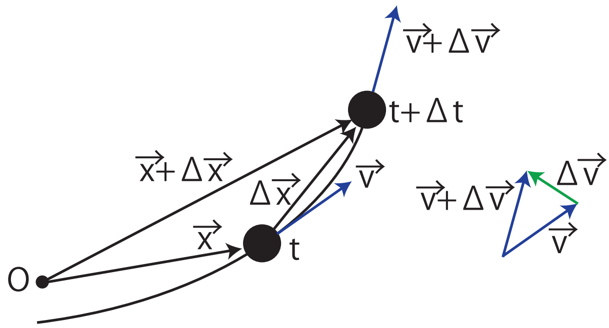


Figure 1.9: 曲線運動

定義 1.7 (曲線運動の平均の速度)

$$\vec{v} \equiv \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

ここで，$\Delta t[s]$ はある有限の時間，$\Delta\vec{x}[m]$ は $\Delta t[s]$ の間の変位です.（曲線運動の場合も，変位とは途中の経路と無関係に，考えている最初の位置と最後の位置を結んだ矢印になります.）$\Delta t[s]$ を無限小にする極限をとると，この式の値は瞬間の速度になります．これを改めて $\vec{v}[m/s]$ とおき直すと，

定義 1.8 (曲線運動の瞬間の速度)

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$$

です．つまり，速度は変位を時間で微分した量です．また，平均の加速度 $\vec{a}[m/s^2]$ は次のように表されます.

定義 1.9 (曲線運動の平均の加速度)

$$\vec{a} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

ここで，$\Delta t[s]$ はある有限の時間，$\Delta\vec{v}[m/s]$ は $\Delta t[s]$ の間の速度の変化量です．$\Delta t[s]$ を無限小にする極限をとると，この式の値は瞬間の加速度になります．これを改めて $\vec{a}[m/s^2]$ とおくと，

定義 1.10 (曲線運動の瞬間の加速度)

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

となります．したがって，加速度は速度を時間で微分した量，あるいは変位を 2 回時間で微分した量です.

1.4 速度の合成と分解

2 つの速度を合成することを考えましょう．例えば，状況としては動いている列車の中で走っている人の速度を求めるような場合です．列車の速度 $v_1[m/s]$ と，列車に対する人の速度 $v_2[m/s]$ の合成速度 $v[m/s]$ を求めましょう．そのためには，速度というものが $1[s]$ 間の変位であることを思い出します．$1[s]$ の間に列車は $v_1[m]$ 動き，その列車に対して人は $v_2[m]$ 動きます．したがって，$1[s]$ 間に，人が地面に対して動いた変位は，

$$v[m] = v_1[m] + v_2[m]$$

となります．$1[s]$ あたりの変位は，速度の定義ですから，これがそのまま合成速度の式になります．

$$v[m/s] = v_1[m/s] + v_2[m/s]$$

一直線上の速度の向きを正と負で表すことができますから，$v, v_1, v_2[m/s]$ は負の値もとることができます．

斜め方向の 2 つの速度を合成する問題を考えましょう．速度はベクトルですから，ベクトルの合成の方法である平行四辺形の作図によって，合成されます．しかし，おそらく，ベクトルという数学的概念が先にあった訳ではなく，速度とか力といった物理的な量が研究され，それがベクトルという抽象化された数学的実体となったと考えられます．ですから，速度の合成は数学的にではなく，物理的に理解する必要があります．速度の合成を考える

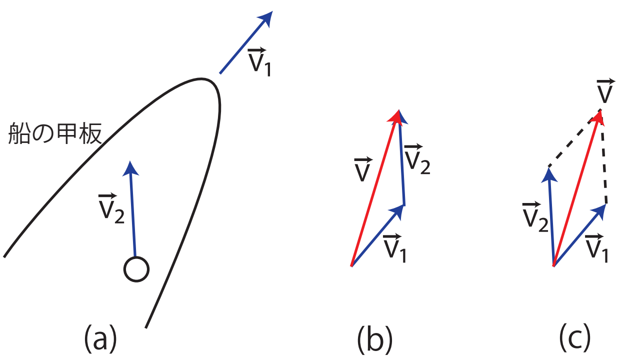


Figure 1.10: 速度の合成と分解

上で，簡単な状況として，運動する船の甲板上にある運動する物体というものを設定しましょう．船が $\vec{v}_1[m/s]$ で運動し，その船に対して物体が $\vec{v}_2[m/s]$ で運動する場合です．一直線上の運動の場合と同じように，速度が $1[s]$ 間の変位であることを使いましょう．$1[s]$ 間に，船は $\vec{v}_1[m]$ だけ動き，物体は船に対して $\vec{v}_2[m]$ だけ動きます．したがって，物体の運動を岸から見ると，$1[s]$ 間に，図の (b) のようになります．すなわち，まず $\vec{v}_1[m]$ だけ船が

変位し，その船の変位に $\vec{v}_2[m]$ を加える訳ですから，$\vec{v}_1[m]$ の終点に $\vec{v}_2[m]$ の始点をもってきて，$\vec{v}_1[m]$ の始点から $\vec{v}_2[m]$ の終点への矢印が，合成された $1[s]$ あたりの変位 $\vec{v}[m]$ になります．$1[s]$ あたりの変位は速度の定義ですから，この図の (b) の関係は，そのまま，速度の関係になります．つまり，速度 $\vec{v}_1[m/s]$ と，速度 $\vec{v}_2[m/s]$ の合成速度は，$\vec{v}[m/s]$ になります．ここで，$\vec{v}_2[m/s]$ を平行移動して始点を揃えると，平行四辺形の図 (c) になります．したがって，合成速度は平行四辺形の対角線となるのです．この状況をベクトルの数式で表すと，

$$\vec{v}[m/s] = \vec{v}_1[m/s] + \vec{v}_2[m/s]$$

となります.

速度の分解は合成の逆です．図の (c) の平行四辺形で赤矢印の合成された速度を，青矢印のもとの速度に戻せばよいのです．速度を分解する際，分解の方向は任意であって，異なる二方向であれば，分解することができます.

1.5 相対速度

通常，速度と言ったとき，基準である地面から見た場合の絶対的な速度を指します．それに対して，お互いに運動している物体が一方から他方を見たときの速度を相対速度と言います.

一直線上の運動の場合，前 Section の速度の合成の式，

$$v = v_1 + v_2$$

において，$v_1[m/s]$ は地面から見た列車の速度，$v_2[m/s]$ は列車に対する人の速度，$v[m/s]$ は地面から見た人の速度です．ここで，$v_2[m/s]$ は列車から見た人の相対速度になっていることに注意しましょう.

$$v_2 = v - v_1$$

となりますから，相対速度を求めるルールとしては，観測者の速度（この場合，列車の速度.）を引くということになります.

斜め方向のの運動の場合，前 Section の速度の合成の式，

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

において，$\vec{v}_1[m/s]$ は岸から見た船の速度，$\vec{v}_2[m/s]$ は船から見た物体の速度，$\vec{v}[m/s]$ は岸から見た物体の速度です．ここで，$\vec{v}_2[m/s]$ は船から見た物体の相対速度になっていることに注意しましょう.

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$$

となりますから，相対速度を求めるルールとしては，一直線上の運動の場合と同じく，観測者の速度を引くということになります．1 から見た 2 の相対速度を $\vec{v}_{12}[m/s]$ と書くことにすると，

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

と書き直すことができます．

J Simplicity HOME

http://www.jsimplicity.com/

Chapter 2

力

2.1 いろいろな力

力の概念は，本来腕力から派生したもののようです．力は物体を変形させたり，物体の運動を変化させたりする原因になっています．

身近な力の例を幾つか挙げておきましょう．まず，地球から引かれる力である重力があります．2 番目の例として，物体が水平面，斜面，あるいは曲面上にあるとき，その面から垂直に働く力が挙げられます．この力を垂直抗力といいます．垂直抗力は何故働くのでしょうか？物体も面も何の変化もないように思えます．実は物体を面の上に置いたとき，物体も面も僅かですが変形しているのです．その歪みをもとに戻そうとする力が垂直抗力の原因となっています．

3 番目の例として，糸が張った状態にあるとき，糸に働いている力である糸の張力が挙げられます．糸の張力の原因も垂直抗力に似ていますが，糸の僅かな歪みによるものです．糸は引っ張られたら少しだけ伸びます．伸びたら縮もうとして張力が働くのです．ここで，軽い糸の場合，全ての位置で同じ大きさの張力が働くことについて言及しておきます.（軽いという言葉は，質量が無視できるという意味で使っています.）このことを証明します．まず，糸を短い部分に分割して考えます．分割したある部分に着目すると，その部分は左右に引かれています．その張力の大きさを，それぞれ $S[N]$ と $T[N]$ とします.（図を参照して下さい.）このとき運動方程式 $ma = F$ は，

$$0 \times a = T - S$$

となり，直ちに $S = T$ が導かれます．この議論を糸の全ての部分に適用すると，全ての位置で同じ大きさの張力が働くことが理解されます．

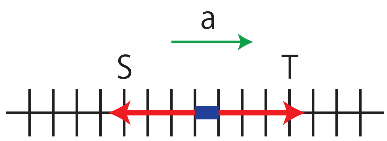


Figure 2.1: 張力

4 番目の例として，ばねの弾性力が挙げられます．ばねの弾性力の大きさ $F[N]$ は，ばねの伸びまたは縮み $x[m]$ に比例します．これをフックの法則と言います．

$$F = kx$$

ここで，$k[N/m]$ は比例定数でばね定数と言います．

5 番目の例として，摩擦力を挙げておきます．摩擦力は物体が面の上にあるとき，その面が粗いときに受ける力です.（理想的には摩擦を受けないなめらかな面というものを考えることができますが，現実にはなめらかな面は存在せず，粗い面しかありません.）物体が静止している場合の摩擦力は静止摩擦力と言います．物体が動き出す直前のギリギリの状態では，最も大きな静止摩擦力が働きますが，これを最大静止摩擦力（大きさを $F[N]$ とします.）と言います．このとき，$F[N]$ は垂直抗力の大きさ $N[N]$ に比例します．

$$F = \mu N$$

ただし，μ は比例定数で静止摩擦係数と言います．μ は面の状態によって決まります．また，物体が動いている場合に働く摩擦力のことを動摩擦力と言います．動摩擦力の大きさ $F'[N]$ も垂直抗力の大きさ $N[N]$ に比例します．

$$F' = \mu' N$$

ただし，μ' は比例定数で動摩擦係数と言います．μ' も接触面によって決まります．一般に，最大静止摩擦力の方が動摩擦力よりも大きくなります．すなわち，

$$\mu > \mu'$$

です．

最後の例として，浮力を挙げておきます．例えば，水中に物体が沈んでいるとき，物体には上の面からも，側面からも，下の面からも，パスカルの原理に従い面に垂直に水圧が働きます．水圧は水深が深い程大きいので，下の面からの圧力の方が，上の面からの圧力よりも大きいのです．差し引き，上への力が生じます．これが浮力です.（側面に働く圧力は打ち消し合います.）

2.2　力の本質-4 つの相互作用

腕力をはじめ，上に挙げたように身近な力はいろいろとありますが，現代の素粒子論では力は次の 4 つに分類されます．

1. 重力（万有引力）
2. 電磁力
3. 強い力（核力）
4. 弱い力

森羅万象において，この 4 つの力が全ての原因になります．この中で，身近な力は重力と電磁力です．また，腕力や垂直抗力，糸の張力，弾性力，摩擦力，浮力等，身近な大抵の力は，原子分子レベルでの電磁力に帰着されます．強い力と弱い力は素粒子の現象において重要となる力です．素粒子論の立場では 4 つの力は 4 つの相互作用と呼ばれます．

2.3　力の合成・分解と力のつりあい

2 つの力と同等な 1 つの力を求めることを力の合成といい，合成された力を合力と言います．逆に，1 つの力と同等な 2 つの力を求めることを力の分解といい，分解された力を分力と言います．ベクトルである力の合成または分解の方法は平行四辺形を描いて求めます．これらは，やはりベクトルである速度の合成・分解と同じような方法になります．

1 つの物体にはたらく 2 力が，大きさが同じで，向きが反対で，同一作用線上にあるとき，力はつりあっていると言います．3 力以上の力のつりあいも，幾つかの力を合成することにより，2 力のつりあいに帰着されます．

2.4　作用・反作用

2 つ物体があって，物体 A が物体 B に力を及ぼすとき，物体 B は物体 A に力を及ぼしかえします．これを作用・反作用の法則といいます．その際，作用・反作用の 2 力は大きさが同じで，向きが反対で，同一作用線上にあります．例えば，手で壁を押すと壁は手を押し返します．手でばねを引くと，ばねは弾性力により手を引き返します． 2 つの電荷の間にはたらくクーロン力はお互いに引き合うか，または，反発しあいます．このように，いかなる場合も作用・反作用の法則は成立するのです．

また，つりありの 2 力と作用・反作用の 2 力は成立する 3 つの条件は同じですが，全く別物の 2 力であることに注意しましょう．つりあいの 2 力は同じ 1 つの物体にはたらく 2

力が，上記の 3 つの条件を満たすときに限り成立する関係です．作用・反作用の 2 力は異なる 2 物体の間で，上記の 3 つの条件を満たす力が必然的に働き合うものです．

では，何故，作用・反作用の力が働きあうのでしょうか？その答えはやはり素粒子レベルの現象に帰着されます．素粒子の 4 つの相互作用では作用・反作用の法則がやはり成立します．マクロな現象での力はミクロレベルの重力と電磁力が原因ですが，そのミクロレベルにおいて作用・反作用の法則が成立するのです．例えば，手で壁を押す場合，手と壁は原子・分子からできています．その原子・分子はミクロレベルにおいて作用・反作用を及ぼし合っています.（この場合は電磁力の作用・反作用です.）その原子・分子が集まって，マクロレベルの物体の間，すなわち手と壁の間に作用・反作用が働き合うのです．

J Simplicity HOME

http://www.jsimplicity.com/

Chapter 3

ニュートンの法則

3.1　ニュートンの三法則

物体の運動と物体にはたらく力について，次のニュートンの三法則が成立します.

法則 3.1 (第一法則（慣性の法則）) “物体に力がはたらかないか，つりあっているとき，物体は静止したままでいるか，または等速直線運動を続けます．”

法則 3.2 (第二法則（運動の法則）) “物体に力がはたらくとき，力の向きに加速度が生じます．加速度の大きさは力の大きさに比例し，質量に反比例します．”

法則 3.3 (第三法則（作用・反作用の法則）) “物体 A が物体 B に力（作用）を及ぼすとき，必然的に物体 B は物体 A に力（反作用）を及ぼしかえします．この *2* 力は大きさが同じで，向きが反対で，同一作用線上にあります．”

第二法則は次式のように表すことができます.

$$a = k\frac{F}{m}$$

ただし，$a[m/s^2]$ は加速度の大きさ，$F[kgw]$ は力の大きさ，$m[kg]$ は質量，k は比例定数です．第二法則（運動の法則）は力が変化する場合もその瞬間，その瞬間においても成立しますが，一定の力 $F[kgw]$ がはたらくシンプルな場合について，図を示しておきます.（$v[m/s]$ は速度です.）ここで，比例定数を簡単な数 1 にするために，力の単位 $[N]$（ニュートン）を次のように定義します.

定義 3.1 (力 2) “$1[N]$ =質量 $1[kg]$ の物体に $1[m/s^2]$ の加速度を生じさせる力の大きさ”

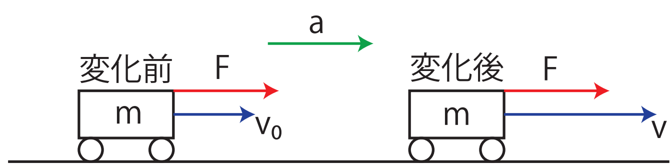


Figure 3.1: 運動の法則

このとき，上式は $ma = F$ という式になりますが，この式を運動方程式と言います．運動方程式を向きまで含めて表すためにベクトルを使って，4 通りに示しておきます．

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}} \tag{3.1}$$

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}} \tag{3.2}$$

$$\boxed{m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}} \tag{3.3}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}} \tag{3.4}$$

最後の式の $\vec{p} \equiv m\vec{v}$ は運動量です．これらの方程式は運動と力の関係を表していますが，上で単位 $[N]$ を定めたように，力の定義式にもなっています.（力の 2 番目の定義です．1 番目の定義は，後の “質量” の Section を見て下さい.）また，右辺で $\vec{F} = 0[N]$ とすると，左辺で加速度が $0[m/s^2]$ になり，慣性の法則とも矛盾しません．運動方程式は力学の理論において根幹をなす方程式です．

3.2 万有引力の法則

2 つの物体について，その間には万有引力と呼ばれる引力がはたらきます．その大きさ $F[N]$ は次式で表されます．

法則 3.4 (万有引力の法則)

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}} \tag{3.5}$$

ここで，$m_1[kg]$ と $m_2[kg]$ はそれぞれの物体の質量，$r[m]$ は 2 物体間の距離です．また，$G[N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}]$ は万有引力定数で，1798 年にキャベンディッシュにより測定され，次の値であることがわかっています．

$$G = 6.67 \times 10^{-11}[N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}]$$

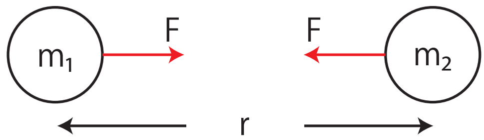


Figure 3.2: 万有引力

万有引力は全ての物体の間ではたらく力です．重力の正体は万有引力ですが，素粒子論では万有引力のことを重力と呼ぶことが一般的です．また，何故重力（万有引力）がはたらくのかという根本的理由についても言及しておきます．ニュートンが万有引力の法則を発見したときは，その理由についてはブラックボックスだったと考えられます．20 世紀になり，アインシュタインが重力（万有引力）の理論である一般相対性理論を完成した際は，重力（万有引力）は時空の曲がりによって説明されました．その後の量子重力理論，更には弦理論においては，まさに重力（万有引力）の本質を解明しようとする試みがなされているのです．

3.3 質量

重さと質量は，本質的に異なる物理量です．重さとは物体にはたらく重力の大きさであり，場所によってその値が違ってきます．力の 1 番目の定義として，

定義 3.2 (力 1) “1[*kgw*]=地球上において，質量 1[*kg*] の物体にはたらく重力の大きさ”

と [*kgw*] という単位を定めることができます．実は，地球上でも重力の測定値は僅かずつではありますが異なります．また，地球上で 60[*kgw*] の重さの物体を月面上で測定すると，約 6 分の 1 の約 10[*kgw*] になることはよく知られています.（場所によって重力の値が異なる理由は，重力の本質が万有引力であり，天体の質量や天体の中心までの距離により重力の大きさが決まるためです.）一方，質量は物質の量であり，場所が違ってもその値は変わりません．地球上で 60[*kg*] の質量の物体は，月面上でも 60[*kg*] であり，宇宙の全ての場所で 60[*kg*] です.（質量の単位には [*kg*] を使います.）重さよりも，質量の方が本質的な物理量であるということが言えます．究極的には，質量とは素粒子の属性であり，電磁気学における電荷と同じような性質をもつ物理量です.（ただし，質量が正の値のみをとる量なのに対し，電荷は正と負のどちらかをとることができる量です.）

質量は物質の量ですが，上記の運動方程式と万有引力の法則の物理法則の中に含まれています．ここで，運動方程式に含まれる質量を慣性質量といい，万有引力の法則に含まれる質量を重力質量といいます．この 2 つの質量は本来，別物であり，同じであるという

根拠は何もありません．しかし，何度実験によって測定しても，その差異はほとんど見出すことはできません．そこで，この 2 つの質量の同一性を自然の本質であると考え，原理にまで止揚したのが，アインシュタインの一般相対性理論における等価原理です．

3.4 力学の体系

上に述べた 4 つの法則は力学の基礎を成すものです．4 つの法則は実験によって直接確かめられます．さらに，4 つの法則から理論的に演繹された結論も実験によって検証されます．例えば，後の Chapter で取り扱う力学的エネルギー保存則，運動量保存則，角運動量保存則はニュートンの三法則の枠内で導出され，それぞれ実験で確認されます．他にも，単振り子の周期の式から惑星の運動に至るまで，多くの現象についての結論が，ニュートンの 3 法則と万有引力の法則から演繹され，実験で実証されています．力学の体系は閉じているのです．体系が閉じているが故に力学は正しいのです.（19 世紀までは正しかったと言った方が正確ですが.）

ここに，物理学の典型的パターンが見受けられます．幾つかの実験事実から帰納された法則が一旦形成されると，その法則から多くの事象が演繹されます．その事象は実験で検証され，ひとつでも確実な反例が見つかると法則は破綻します．19 世紀までの力学は確固たるものでしたが，20 世紀になって反例が発見され破綻しました．その結果，誕生したのが相対性理論と量子力学です．相対性理論においては絶対空間と絶対時間といったニュートン力学の根底が否定され，相対的な時空という概念が確立されました．量子力学においても幾つかの革命的な考え方が導入されました．まず，エネルギーという物理量が不連続で跳び跳びの値をとることが認識されました．また，ニュートン力学では運動方程式という微分方程式が立てられ，初期条件を与えれば運動は決定論的に決まってしまいますが，量子力学においては，量子論的概念である量子状態とそれが従うシュレディンガー方程式（これも微分方程式です.）によって確率的に系が記述されます．その後，力学は古典力学として位置付けられ，その法則は限られた範囲内でのみ成立することになりました．つまり，相対論的効果が効いてこないためには，運動の速さが光速に比べて非常に遅いこと，量子論的効果が効いてこないためには，マクロな現象を取り扱うこと，これらのことが，古典力学が有効であるための条件です．ただし，力学的エネルギー保存則，運動量保存則，角運動量保存則の 3 つの保存則は現代物理の枠の中でも成立することがわかっています．

3.5 MKS 単位系

物理量の中で，長さ，質量，時間は最も基本的なものです．ここで，長さの単位に $[m]$，質量の単位に $[kg]$，時間の単位に $[s]$ を採用する単位系を MKS 単位系と言います．長さ，質量，時間以外の物理量，例えば，速度，加速度，力といったもの，あるいは今後出てくる運動量，エネルギー等の単位は全て長さ，質量，時間の単位の組み合わせでつくることができます．ただし，電磁気学まで考えた場合は，さらに電流の単位 $[A]$ を基本的な単位として取り入れる必要があります.（これを MKSA 単位系と言います.）Group 古典物理学の中では，MKS 単位系または MKSA 単位系で統一して取り扱うことにします.

Chapter 4

力学的エネルギー

4.1　エネルギー原理（運動方程式第 1 の変形）

これから 3 つの Chapter にわたって，運動方程式を変形し，力学の法則を導くことを考えてみましょう．この Chapter では運動方程式の第 1 の変形を試みます．まず，直線運動している物体において，運動の向きに一定の力がはたらく場合を考えます．例えば，力学台車を一定の力で，真っ直ぐに引くような場合です．このとき，物体は一定の加速度 $a[m/s^2]$

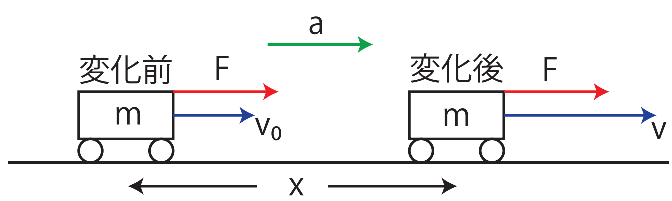


Figure 4.1: エネルギー原理

の等加速度直線運動をするので，関係式，

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

が成立します．ここで，$v[m/s]$ は終速度，$v_0[m/s]$ は初速度，$x[m]$ は移動距離です．この式は，運動方程式 $ma = F$ より，次のように変形されます.

$$v^2 - v_0^2 = 2\frac{F}{m}x$$
$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Fx$$

ここで，2 つの物理量を定義します．すなわち，運動エネルギー $T[J]$ と仕事 $W[J]$ を次式で定めます.

$$T \equiv \frac{1}{2}mv^2$$
$$W \equiv Fx$$

このとき，

- “運動エネルギーの変化量は仕事に等しくなります．”

という関係が成立します.（理論の展開の中で物理量が定義されていることに注意して下さい.）図の場合では，力の向きと運動の向きが同じですが，このとき力は正の仕事をすると言います．正の仕事の分だけ，運動が激しくなり運動エネルギーが増大することになります.（力の向きと運動の向きが逆の場合，負の仕事をすると言いますが，このときは運動が穏やかになり，負の仕事の分だけ運動エネルギーが減少することになります.）

一般に，力の大きさと向きが変化する場合を考えてみましょう．運動方程式，

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

の両辺に $\vec{v}dt = d\vec{x}$ を掛けてスカラー積をとり，次のように変形します．ただし，$d\vec{x}[m]$ は微小時間における変位ベクトルです.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$
$$\therefore md\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$
$$\therefore mvdv = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$
$$\therefore \int_{v_A}^{v_B} mvdv = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

よって，次式が成立します.

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{x}} \tag{4.1}$$

ただし，はじめの速度を $v_A[m/s]$，はじめの位置を A，終りの速度を $v_B[m/s]$，終りの位置を B としました．ここで，運動エネルギー $T[J]$ と仕事 $W[J]$ を次式で定義します．

$$
\begin{aligned}
T &\equiv \frac{1}{2}mv^2 \\
W &\equiv \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_{s_1}^{s_2} F ds\cos\theta
\end{aligned}
$$

$\theta[rad]$ はその瞬間における力 $\vec{F}[N]$ と，その変位ベクトル $d\vec{x}[m]$ のなす角であり，$ds[m]$ は微小時間における変位ベクトル $d\vec{x}[m]$ の大きさです．位置 A から位置 B までの積分は線積分です.（ここでも理論の展開の中で物理量が定義されていることに注意して下さい.）(4.1) 式より，力が変化する場合も，

原理 4.1 (エネルギー原理) “運動エネルギーの変化量は仕事に等しくなります． ”

という関係が成立することが理解されます．(4.1) 式をエネルギー原理と言います．

4.2 仕事率

仕事の能率を表す物理量として，単位時間の仕事である仕事率 $P[W]$（ワット）を次式で定義します．

$$
P \equiv \frac{W}{t}
$$

$[W] = [J/s]$ です．特に，力がつりあっていて，一定の速さ $v[m/s]$ で運動しているときには次式が成立します．

$$
\begin{aligned}
P &\equiv \frac{W}{t} \\
&= \frac{Fx}{t} \\
\therefore P &= Fv
\end{aligned}
$$

4.3 保存力とポテンシャル

仕事が最初の位置と最後の位置で決定され，途中の経路に依らないとき，はたらいている力を保存力と言います．保存力を $\vec{F}'[N]$，保存力のする仕事を $W'[J]$ と表すことにします．保存力の例としては，重力，弾性力，万有引力，クーロン力等が挙げられます．保存力の正の仕事 $W'[J]$ により，物体が位置 A から基準の位置 O まで動いたとき，エネルギー原理 (4.1) 式から，物体の運動エネルギーは $W'[J]$ だけ増加します．ということは，物体ははじめの位置 A にあるとき，すでに仕事をする能力，すなわちエネルギーをもっていたことに

なります．このエネルギーをポテンシャル $V(A)[J]$ と定義します．基準の位置 O における ポテンシャルを $0[J]$ ととると，

$$V(A) \equiv W'_{A\to O} = \int_A^O \vec{F'} \cdot d\vec{x}$$

となります．

具体的なポテンシャルを求めておきましょう．まず，一様な重力によるポテンシャルを表します．最初に，鉛直下向きに物体が移動する場合を考えます．鉛直上向きに z 軸をとり，高さ $0[m]$ の基準におけるポテンシャルを $0[J]$ とします．このとき，ポテンシャル $V[J]$ は次のように計算されます．

$$V = mg \times h = mgh$$

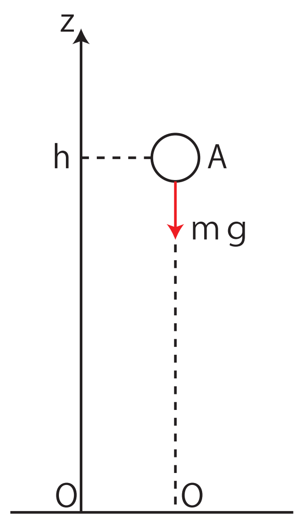


Figure 4.2: ポテンシャル 1

次に，図 “ポテンシャル 2” のように経路を 2 つ考え，それぞれのポテンシャルを計算してみます．経路 1 の場合，ポテンシャル $V_1[J]$ は次のようになります．

$$V_1 = mg \times h + mg \times 0$$
$$= mgh$$

経路 2 の場合，ポテンシャル $V_2[J]$ は次のようになります．

$$V_2 = mg\sin\theta \times \frac{h}{\sin\theta}$$
$$= mgh$$

経路 1 と経路 2 でポテンシャルは同じです．一般に，重力がはたらいているとき，任意の経路について，ポテンシャルは次のように計算されます．

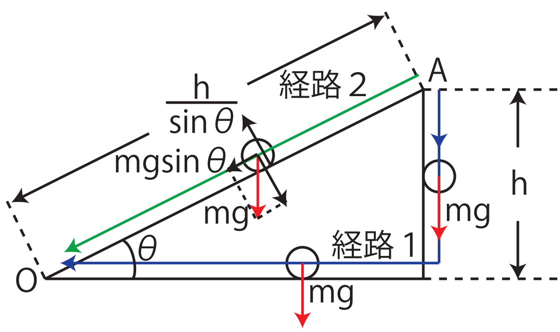


Figure 4.3: ポテンシャル 2

$$
\begin{aligned}
V &\equiv W'_{A\to O} \\
&= \int_A^O \vec{F'} \cdot d\vec{x} \\
&= \int_A^O \{0 \cdot dx + 0 \cdot dy + (-mg)dz\} \\
&= \int_h^0 (-mg)dz \\
&= mgh
\end{aligned}
$$

確かに，重力によるポテンシャルは高さ $h[m]$ だけで決まる量であることが理解されますね．

次に，弾性力によるポテンシャルを求めておきます．ただし，ばねに沿って x 軸をとり，自然長の位置を $x = 0[m]$ とします．次のように計算されます．

$$
\begin{aligned}
V &= \int_x^0 (-kx)dx \\
&= [-\frac{1}{2}kx^2]_x^0 \\
&= \frac{1}{2}kx^2
\end{aligned}
$$

それでは，保存力をポテンシャルで表す式を導いておきましょう．

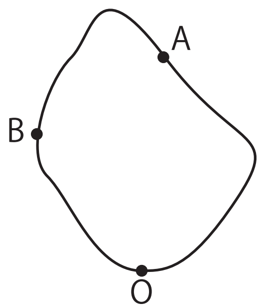


Figure 4.4: ポテンシャル 3

$$
\begin{aligned}
W'_{A\to B} &= W'_{A\to O\to B} \\
&= W'_{A\to O} + W'_{O\to B} \\
&= W'_{A\to O} - W'_{B\to O} \\
\therefore W'_{A\to B} &= V(A) - V(B)
\end{aligned}
$$

計算を続けます．

$$\begin{aligned}\int_A^B \vec{F'}\cdot d\vec{x} &= -\int_A^B dV \\ &= -\int_A^B (\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz) \\ &= \int_A^B (-\nabla V)\cdot d\vec{x}\end{aligned}$$

ですから，次の関係式が成立します．

$$\boxed{\vec{F'} = -\nabla V(\vec{x})} \tag{4.2}$$

ただし，記号ナブラ，

$$\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

を使っています．保存力は (4.2) 式により，ポテンシャル $V[J]$ で表されます．逆に，力がポテンシャルにより (4.2) 式で導かれる場合，その力は保存力になります．

話は前後しますが，3 番目のポテンシャルの例として，万有引力によるポテンシャルを求めることにします．次のように計算されます．

$$\begin{aligned}V(A) - V(\infty) &= W'_{A\to\infty} \\ &= \int_A^\infty (-G\frac{m_1 m_2}{r^2})dr \\ &= Gm_1m_2[\frac{1}{r}]_A^\infty \\ &= -G\frac{m_1m_2}{r_A}\end{aligned}$$

A 点での $r[m]$ である $r_A[m]$ を，改めて $r[m]$ とおき直すと，

$$V = -G\frac{m_1m_2}{r}$$

となります．万有引力は引力なのでポテンシャルは負の値をとります．これは，遠く離れる程近づく可能性が生じるので高いエネルギーになり，その最も大きなエネルギーをもつ無限遠のポテンシャルの値を基準として $0[J]$ にしたことによります．

4.4 力学的エネルギー保存則

保存力のみが仕事をする場合，エネルギーの間にどのような関係が成立するでしょうか？簡単な場合から見ておきます．まず，図のようになめらかな摩擦の無い曲がった斜面を下

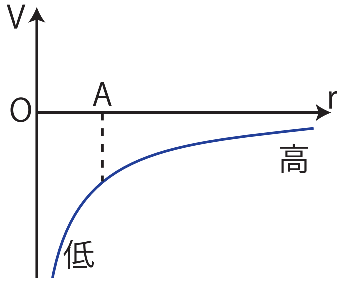


Figure 4.5: ポテンシャル 4

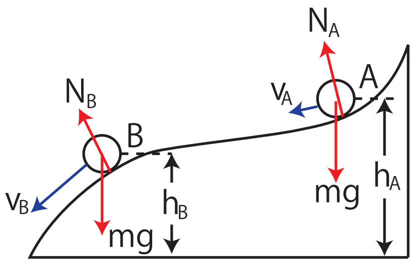


Figure 4.6: 力学的エネルギー保存則 1

る物体について考えてみます．物体は A から B へ移動しますが，その間，常に垂直抗力は進行方向と直交していますので，する仕事は 0[J] です．保存力である重力のみが仕事をすることになります．ここで，“運動エネルギーの変化量は仕事に等しい．” というエネルギー原理より，次のように計算されます．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 &= \int_A^B \{0 \times dx + 0 \times dy + (-mg) \times dz\} \\ &= [-mgz]_A^B \\ &= -mgh_B + mgh_A\end{aligned}$$

よって，結論は，

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

です．最後の式は運動エネルギーとポテンシャルの和が一定であることを示しています．ここで，運動エネルギーとポテンシャルのことを力学的エネルギーと呼ぶことにしましょう．保存力である重力のみが仕事をするとき，力学的エネルギーの和は保存するのです．

次に，水平ばね振り子について見ておきます．この場合，保存力である弾性力のみが仕事をしています．ここで，“運動エネルギーの変化量は仕事に等しい．” というエネルギー

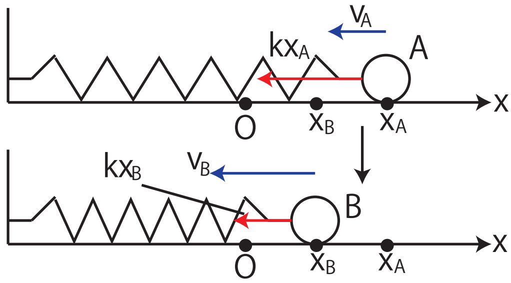


Figure 4.7: 力学的エネルギー保存則 2

原理より，次のように計算されます．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 &= \int_A^B (-kx)dx \\
&= [-\frac{1}{2}kx^2]_A^B \\
&= -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2
\end{aligned}
$$

よって，結論は，

$$
\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kx_B^2
$$

です．最後の式は運動エネルギーとポテンシャルの和，すなわち力学的エネルギーの和が一定であることを示しています．

一般に，保存力のみが仕事をする場合，

$$
W'_{A\to B} = V(A) - V(B)
$$

が成立しますが，左辺の保存力による仕事 $W'[J]$ により，(4.1) 式のように運動エネルギーが変化します．故に，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 &= V(A) - V(B) \\
\therefore \frac{1}{2}mv_A^2 + V(A) &= \frac{1}{2}mv_B^2 + V(B) \\
\therefore T + V &= E(const)
\end{aligned}
$$

という関係が導かれました．すなわち，

法則 4.1 (力学的エネルギー保存則) “保存力のみが仕事をする場合，力学的エネルギーの和は一定です．”

という力学的エネルギー保存則が成立することが理解されます．以上の議論によりニュートンの法則の Chapter の中の力学の体系の Section で述べたこと，力学的エネルギー保存則はニュートンの 3 法則の枠内で導出されることが理解されました.（第二法則（運動の法則，つまり運動方程式）から導出されました.）ところで，保存力以外の力（これを非保存力といいます.）が仕事をする場合，力学的エネルギー保存則は成立しません．非保存力の例としては，動摩擦力，空気の抵抗力等が挙げられますが，そのような力がはたらく場合には熱が発生し，力学的エネルギーは減少します.

J Simplicity HOME

`http://www.jsimplicity.com/`

Chapter 5

運動量

5.1　運動量原理（運動方程式の第 2 の変形）

運動方程式の第 2 の変形を試みましょう．まず，直線運動している物体において，運動の向きに一定の力がはたらく場合を考えます．例えば，力学台車を一定の力で真っ直ぐに引くような場合を想定します.（運動の法則，エネルギー原理でも同様な状況を考えましたね．この 1 つの状況を 3 種類の方法で取り扱うことができるのです．3 種類の方法というのは，(1) 加速度と力，(2) 運動エネルギーと仕事（エネルギー原理），そして今から見ていく，(3) 運動量と力積（運動量原理）のそれぞれの関係です.）このとき，次式で表される一定の加

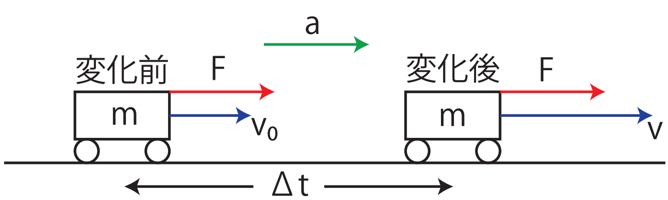


Figure 5.1: 運動量原理

速度 $a[m/s^2]$ が生じます．

$$a = \frac{v - v_0}{\Delta t}$$

ここで，$v[m/s]$ は終速度，$v_0[m/s]$ は初速度，$\Delta t[s]$ は力がはたらいている時間を表します．この式を運動方程式 $ma = F$ に代入して変形すると，次のようになります．

$$m\frac{v - v_0}{\Delta t} = F$$

$$\therefore mv - mv_0 = F \cdot \Delta t$$

ここで，2 つの物理量を定義します．左辺の質量と速度の積を運動量 $p[kg \cdot m/s]$ と定義します．すなわち，

$$p \equiv mv$$

です．また，右辺の力と時間の積を力積 $I[N \cdot s]$ と定義します.

$$I \equiv F \cdot \Delta t$$

このとき，

- “運動量の変化量は力積に等しくなります．”

という関係が成立します.（運動量と力積は理論の展開の中で定義されている物理量であることに注意しておきます.）すなわち，力をはたらかせ力積を加えると，運動が激しくなり，加えた力積の分だけ運動量が増大することになります.（力が運動の向きと逆向きの場合は運動量は減少します.）

次に，時間的に変化する力が物体にはたらく場合を考えましょう．運動方程式は次のように変形されます.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$
$$\therefore \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$$

ここで，運動量 $\vec{p}[kg \cdot m/s]$ を次式で定義します.

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}$$

これは，先程の定義を向きまで含めて拡張したものになっています．このとき，運動方程式は，

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

となります．故に，

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$$

ですが，さらに，この式の両辺を力がはたらいている時間 $t_0[s]$ から $t[s]$ まで積分します.

$$\int_{t_0}^{t} d\vec{p} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot dt$$

故に，次式の関係が成立します.

$$\boxed{\vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot dt} \tag{5.1}$$

この式の右辺の量を力積 $\vec{I}[N \cdot s]$ として定義します.

$$\vec{I} \equiv \int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot dt$$

（ここでも運動量と力積は理論の展開の中で定義されている物理量であることに注意しましょう.）したがって，力が変化する場合も，

原理 5.1 (運動量原理) “運動量の変化量は力積に等しくなります．”

という関係が成立します．この関係は運動方程式と等価です.

5.2 1 物体系の運動量保存則

運動量原理 (5.1) 式,

$$\vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot dt$$

において，力が働かない場合，右辺は 0 になります．よって，

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(t_0)$$

となります．すなわち，運動量は時間的に変化しません．このことを 1 物体系の運動量保存則といいます．物体は等速直線運動しますが，この状況は慣性の法則そのものです.

J Simplicity HOME

`http://www.jsimplicity.com/`

Chapter 6

角運動量

6.1 角運動量原理（運動方程式の第 3 の変形）

運動方程式の第 3 の変形を試みます．z 軸を中心に xy 平面上を半径 $r[m]$ で接線方向に運動量の大きさ $p[kg \cdot m/s]$ の円運動している物体を考えます．大きさ $F[N]$ の力が円の接線

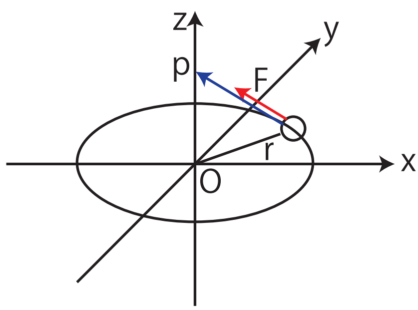


Figure 6.1: 角運動量原理 1

方向に加わっている場合，円の接線方向について，次の運動方程式が成立します．

$$\frac{dp}{dt} = F$$

この方程式は大きさの関係を表しています．両辺を $r[m]$ 倍すると次のようになります．

$$r\frac{dp}{dt} = rF$$
$$\therefore \frac{d(rp)}{dt} = rF$$

ここで，z 軸回りの角運動量 $L_z[kg \cdot m^2/s]$ と z 軸回りのモーメント $N_z[N \cdot m]$ を次のように定義します．

$$L_z \equiv rp$$

$$N_z \equiv rF$$

（ここでも理論の展開の中で物理量が定義されることに注意しましょう．）ここで，角運動量は物体の回転運動を表す物理量であり，モーメントは力の回転の能率を表す物理量です．このとき，上の式は，

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z$$

と表されることになります．すなわち，

- “角運動量の時間微分はモーメントに等しくなります．”

という関係が成立します．これを角運動量原理といいます．

次に，xy 平面上の一般の運動を考えましょう．運動方程式は，

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x \tag{6.1}$$

$$\frac{dp_y}{dt} = F_y \tag{6.2}$$

です．ただし，添え字の x と y はそれぞれの方向の成分を示します．ここで，$x\times$ (6.2) 式-$y\times$ (6.1) 式をつくると次のようになります．

$$x\frac{dp_y}{dt} - y\frac{dp_x}{dt} = xF_y - yF_x$$

ここで，

$$\frac{dx}{dt}p_y = \frac{dy}{dt}p_x = mv_xv_y$$

が成立するので，

$$\left(\frac{dx}{dt}p_y + x\frac{dp_y}{dt}\right) - \left(\frac{dy}{dt}p_x + y\frac{dp_x}{dt}\right) = xF_y - yF_x$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(xp_y - yp_x) = xF_y - yF_x$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{x}\times\vec{p})_z = (\vec{x}\times\vec{F})_z$$

となります．ただし，最後の式の中の記号 $\times$ はベクトル積を表します．ここで，z 軸回りの角運動量 $L_z[kg \cdot m^2/s]$ と z 軸回りのモーメント $N_z[N \cdot m]$ を次のように定義します．

$$L_z \equiv (\vec{x}\times\vec{p})_z$$

$$N_z \equiv (\vec{x}\times\vec{F})_z$$

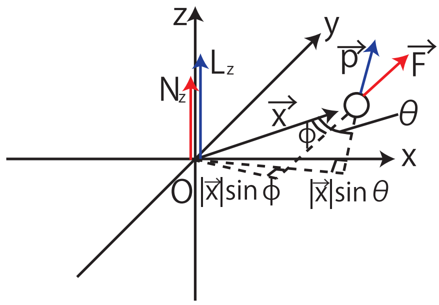


Figure 6.2: 角運動量原理 2

（ここでも理論の展開の中で，物理量が定義されていることに注意して下さい.）$L_z[kg \cdot m^2/s]$ と $N_z[N \cdot m]$ は，それぞれベクトル積で表されているので，その大きさは次式で示されます.（図を参照して下さい.）

$$|L_z| = |\vec{x}||\vec{p}|\sin\theta$$
$$|N_z| = |\vec{x}||\vec{F}|\sin\phi$$

このとき，

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z$$

が成り立つことになります．すなわち，xy 平面上の運動についても，

- "角運動量の時間微分はモーメントに等しくなります．"

という関係が成立します.

更に，一般の 3 次元空間上の運動について，運動方程式を変形し，同じ関係が成立することを見ておきましょう．運動方程式は次式です.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$d\vec{p}[kg \cdot m/s]$ と $\vec{F}[N]$ は同一方向ですが，その向きは任意である場合を考えています．この運動方程式の両辺に，左から位置ベクトル $\vec{x}[m]$ をかけてベクトル積をとります.

$$\vec{x} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{x} \times \vec{F}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{x} \times \vec{p}) &= \frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{p} + \vec{x} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{x} \times \vec{F}\end{aligned}$$

であることに注意します．$\frac{d\vec{x}}{dt}[m/s]$ と $\vec{p} = m\frac{d\vec{x}}{dt}[kg \cdot m/s]$ は向きが同じなので，そのベクトル積は 0 になります．また，右辺第 2 項は運動方程式を使いました.）故に，

$$\frac{d}{dt}(\vec{x} \times \vec{p}) = \vec{x} \times \vec{F}$$

となります．この式の中で，角運動量 $\vec{L}[kg \cdot m^2/s]$ とモーメント $\vec{N}[N \cdot m]$ を次のように定義します.

$$\vec{L} \equiv \vec{x} \times \vec{p}$$

$$\vec{N} \equiv \vec{x} \times \vec{F}$$

（ここでも理論の展開の中で物理量が定義されていることに注意して下さい.）このとき，上の式は，

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}} \tag{6.3}$$

となります．すなわち，3 次元空間の中の一般の場合も，

原理 6.1 (角運動量原理) “角運動量の時間微分はモーメントに等しくなります．”

という角運動量原理が成立します.

6.2 角運動量保存則

角運動量原理 (6.3) 式，

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

において，モーメントを $0[N \cdot m]$ とすると，

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

となります．すなわち，

法則 6.1 (角運動量保存則) “外力のモーメントが $0[N \cdot m]$ のとき，角運動量は一定になります．”

という角運動量保存則が成立することが理解されます.

以上の議論より，“ニュートンの法則” の Chapter の “力学の体系” の Section で述べたこと，つまり角運動量保存則はニュートンの三法則の枠内で導出されることが理解されます.（第二法則（運動の法則，つまり運動方程式）から導出されました.）

Chapter 7

例1（自由粒子と拘束運動）

7.1　自由粒子

宇宙空間のような無重力状態において，外からの場も存在せず，外力も加わっていない粒子を自由粒子と言います．この場合，慣性の法則により，自由粒子は静止しているか，あるいは等速直線運動をしています．このとき，速さが変わらず運動エネルギーは一定です．そして，場がないということは，ポテンシャルは $0[J]$ になります．従って，力学的エネルギー保存則が成立しています．また，速度が変わらず運動量も一定なので，運動量保存則も成立しています．

7.2　拘束運動

物体が直線や曲線，あるいは曲面の上でのみ運動を行うとき，その運動を拘束運動と言います．その際，直線や曲線，あるいは曲面から受ける力を拘束力と言います．拘束力の例としては，垂直抗力（水平面上の運動や斜面上の運動の場合等.），糸の張力（単振り子の場合等.），弾性力（ばね振り子の場合等.）等が挙げられます．

7.3　水平面上の運動

ここでは，拘束運動の例として，最も簡単な場合，すなわち，水平面上での運動を考えます．これから，考える幾つかの状況において，それぞれ (1) 運動と力の関係（慣性の法則，または運動方程式），(2) 運動エネルギーと仕事の関係（エネルギー原理），(3) 運動量と力積の関係（運動量原理）で取り扱えることを確認していきます．まず，水平面が摩擦の

無い理想的な状況で，置かれた物体に鉛直方向には重力と垂直抗力がつりあっていて，水平方向には力がはたらいていない場合を考えます．この場合，慣性の法則より，物体は静止しているか，あるいは等速直線運動をしています．このとき，運動エネルギーは一定で，高さが変わらないのでポテンシャルも変化せず，力学的エネルギー保存則は成立しています．また，運動量も一定なので，運動量保存則も成立しています．

次に，なめらかな水平面上にある物体について，鉛直方向には重力と垂直抗力がつりあっていて，水平方向には一定の大きさの外力がはたらいている場合を考えます．外力 $F[N]$ により，加速度 $a[m/s^2]$ が生じますが，運動方程式 $ma = F$ が成立します．力学的エネルギーについては，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Fx$$

という式が成立しました．すなわち，

- “運動エネルギーの増加量は加えた仕事に等しくなります．”

というエネルギー原理が成り立ちます．運動量については，

$$mv - mv_0 = F \cdot \Delta t$$

という式が成立しました．すなわち，

- “運動量の増加量は加えた力積に等しくなります．”

という運動量原理が成り立ちます．

最後に，粗い水平面上にある物体について，鉛直方向には重力と垂直抗力がつりあっていて，水平方向には一定の大きさの動摩擦力が進行方向と逆向きにはたらいている場合を考えます．大きさ $F'[N]$ の動摩擦力により負の加速度 $a[m/s^2]$ が生じますが，運動方程式 $ma = -F'$ が成立します．この場合，加速度は負，$a < 0$ になります．力学的エネルギーについては，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -F'x$$

という式が成立します．ここで，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 > \frac{1}{2}mv^2$$

の大小関係があります．このとき，

- “運動エネルギーの減少量は負の仕事に等しくなります．”

というエネルギー原理が成り立ちます．運動量については，

$$mv - mv_0 = -F' \cdot \Delta t$$

という式が成立します．ここで，

$$mv_0 > mv$$

の大小関係があります．このとき，

- “運動量の減少量は負の力積に等しくなります．”

という運動量原理が成り立ちます.

J Simplicity HOME

`http://www.jsimplicity.com/`

Chapter 8

例2（落体の運動）

8.1　落体の運動

この Chapter では，物体の落下運動，いわゆる落体の運動について取り扱います．その種類としては，初速度 $0[m/s]$ で鉛直下向きに運動する自由落下，初速度を鉛直下向きに与えた鉛直投げ下ろし，初速度を鉛直上向きに与えた鉛直投げ上げ，初速度を水平方向に与えた水平投射，初速度を斜め上向きに与えた斜方投射等が挙げられます．現実の落体の運動では空気の抵抗力がはたらきますが，ここでは，それを無視して考えます．

古代ギリシアの哲学者アリストテレスが重いものは軽いものよりも速く落下すると唱えて以来，このことはヨーロッパ社会において約 2000 年間信じられました．アリストテレスは理論的ではありましたが，実際に実験して検証するということをしませんでした．自由落下の実験を行ってみて，重いものも軽いものも同時に落下することを，最初に確かめたのはガリレイです.（ガリレイはピサの斜塔でその実験を行ったというエピソードが残っています.）自由落下した物体の加速度は鉛直下向きに，

$$g = 9.8[m/s^2]$$

で一定であり，等加速度直線運動をすることが測定されています．この $g[m/s^2]$ のことを重力加速度といいます．加速度の原因は重力ですが，その大きさは運動方程式 $ma = F$ において，$a[m/s^2]$ に $g[m/s^2]$ を代入して，$mg[N]$ であることが理解されます．また，力の大きさは 2 通りに定義されていました．つまり，$[kgw]$ と $[N]$ ですが，例えば，$1[kgw]$ とは質量 $1[kg]$ の物体にはたらく重力の大きさですから，$[N]$ で表すと次のようになります．

$$\begin{aligned} 1[kgw] &= 1[kg] \times 9.8[m/s^2] \\ &= 9.8[N] \end{aligned}$$

落体の運動では，鉛直方向の加速度が，いずれの場合も下向きに重力加速度 $g[m/s^2]$ になりますが，その理由は次のように説明されます．自由落下の実験により，そのときの加速度は鉛直下向きに，重力加速度 $g = 9.8[m/s^2]$ であることが測定されます．ここで，運動方程式 $ma = F$ において，$a[m/s^2]$ に $g[m/s^2]$ を代入して，加速度の原因の重力の大きさが $mg[N]$ であることがわかります.（ここまでの説明は，既に前出してあります.）この重力 $mg[N]$ は，自由落下に限らず，全ての落体の運動において鉛直下向きにはたらくことに注意しましょう．従って，全ての落体の運動について，鉛直方向の運動方程式は下向きを正として，$ma = mg$ となります．故に，全ての落体の運動について，加速度は鉛直下向きに重力加速度 $g[m/s^2]$ となることが理解されます．また，水平投射と斜方投射において，水平方向の運動は等速運動になりますが，その理由も述べておきます．この 2 つの運動において，重力は鉛直方向にはたらき，水平方向には何も力がはたらいていません．故に，水平方向は慣性の法則により等速運動を行うことが理解されます.

8.2 自由落下

力学においては，運動を微分方程式で扱います．その際，初期条件（$t = 0[s]$ での条件を初期条件と言います.）を与えれば運動は決定してしまいます．運動する前から，計算によってわかってしまうのです．ニュートン力学では事象は決定論的です.

それでは，自由落下の運動を取り扱ってみましょう．状況は図の通りです．物体は鉛直下向きに運動するので，座標軸である y 軸は下向きにとっています．まず，加速度は $g[m/s^2]$ ですから，

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g$$

となります．これを時間 $t[s]$ で積分していくと，

$$\frac{dy}{dt} = gt + C(C : const)$$
$$\therefore y = \frac{1}{2}gt^2 + Ct + C' \; (C' : const)$$

となります．ここで，初期条件，$t = 0[s]$ において，$v_0 = 0[m/s]$ を代入すると，

$$0 = g \times 0 + C$$
$$\therefore C = 0$$

となります．さらに，初期条件，$t = 0[s]$ において $y =$

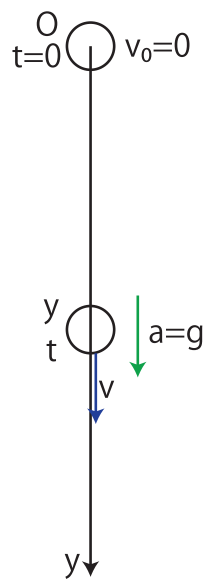


Figure 8.1: 自由落下

$0[m]$ を代入すると，

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}g \times 0^2 + 0 \times 0 + C' \\ \therefore C' &= 0 \end{aligned}$$

となります．したがって，

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= gt \\ y &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

が成立します．

8.3 鉛直投射

この Section では，鉛直方向の落体の運動を考えます．鉛直投げ下ろしと鉛直投げ上げのいずれの場合も，鉛直下向きに重力加速度 $g[m/s^2]$ で等加速度運動を行います．この 2 つの運動では，鉛直投げ下ろしは初速度が下向きであり，鉛直投げ上げは初速度が上向きである点のみが相違します．まず，鉛直投げ下ろしを取り扱ってみます．状況は図の通りです．

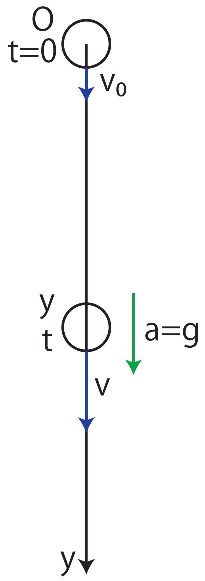


Figure 8.2: 鉛直投射 1

物体は鉛直下向きに運動するので，座標軸である y 軸は下向きにとってあります．まず，加速度は $g[m/s^2]$ ですから，

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g$$

となります．これを時間 $t[s]$ で積分していくと，

$$\frac{dy}{dt} = gt + C\,(C; const)$$
$$\therefore y = \frac{1}{2}gt^2 + Ct + C'\,(C'; const)$$

となります．ここで，初期条件，$t = 0[s]$ において，$v = v_0[m/s]$ を代入すると，

$$v_0 = g \times 0 + C$$
$$\therefore C = v_0$$

となります．さらに，初期条件，$t = 0[s]$ において $y = 0[m]$ を代入すると，

$$0 = \frac{1}{2}g \times 0^2 + v_0 \times 0 + C'$$
$$\therefore C' = 0$$

となります．したがって，

$$\frac{dy}{dt} = v_0 + gt$$
$$y = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$$

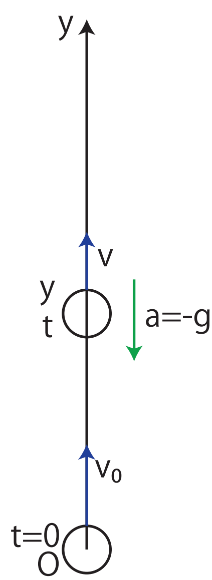
が成立します．

次に，鉛直投げ上げを取り扱ってみます．物体は最初，鉛直上向きに運動するので，座標軸である y 軸は上向きにとってあります．まず，加速度は $-g[m/s^2]$ ですから，（y 軸を上向きにとったので，下向きの加速度は負の値になります.）

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

となります．これを時間 $t[s]$ で積分していくと，

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C\,(C; const)$$
$$\therefore y = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + C'\,(C'; const)$$



となります．ここで，初期条件，$t = 0[s]$ において，
$v = v_0[m/s]$ を代入すると，

$$v_0 = -g \times 0 + C$$
$$\therefore C = v_0$$

となります．さらに，初期条件，$t = 0[s]$ において $y = 0[m]$ を代入すると，

$$0 = -\frac{1}{2}g \times 0^2 + v_0 \times 0 + C'$$
$$\therefore C' = 0$$

となります．したがって，

$$\frac{dy}{dt} = v_0 - gt$$
$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

が成立します．

8.4 放物運動

初速度 $v_0[m/s]$ で水平投射すると，物体は放物線を描いて運動しますが，水平方向（x 方向と約束します．）と鉛直方向（y 方向と約束します．）に分解して取り扱います．x 方向は等速運動を行い，y 方向は下向きに重力加速度 $g[m/s^2]$ で等加速度運動をするという特徴がありました．x 方向は等速運動するので，次式が成立します．

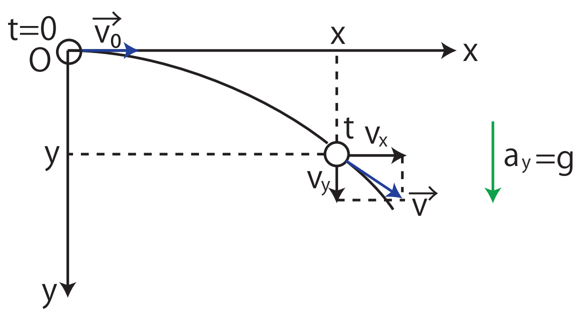


Figure 8.4: 放物運動 1

$$v_x = v_0$$
$$x = v_0 t$$

y 方向は初速度 $0[m/s]$，加速度 $a_y = g[m/s^2]$ で等加速度運動をするので，自由落下と同じになります．したがって，次式が成立します.（自由落下の場合と同じく，y 軸は鉛直下向きにとりました.）

$$v_y = gt$$
$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

時間 $t[s]$ を消去して，x と y の関係を求めると次のようになります.

$$t = \frac{x}{v_0}$$
$$\therefore y = \frac{1}{2}g(\frac{x}{v_0})^2$$
$$\therefore y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

最後の関係式は，図の中の物体が描く軌跡の方程式を意味しています.

次に，初速度の大きさ $v_0[m/s]$，仰角 $\theta[rad]$ で斜方投射する場合を考えます．物体は放物線を描いて運動しますが，水平投射と同様に，水平方向（x 方向）と鉛直方向（y 方向）に分解して取り扱います．ここで，x 方向は等速運動を行い，y 方向は下向きに重力加速度 $g[m/s^2]$ で等加速度運動するという特徴がありました.（水平投射の場合と同じ運動の特徴になります.）x 方向は等速運動するので，次式が成立します.

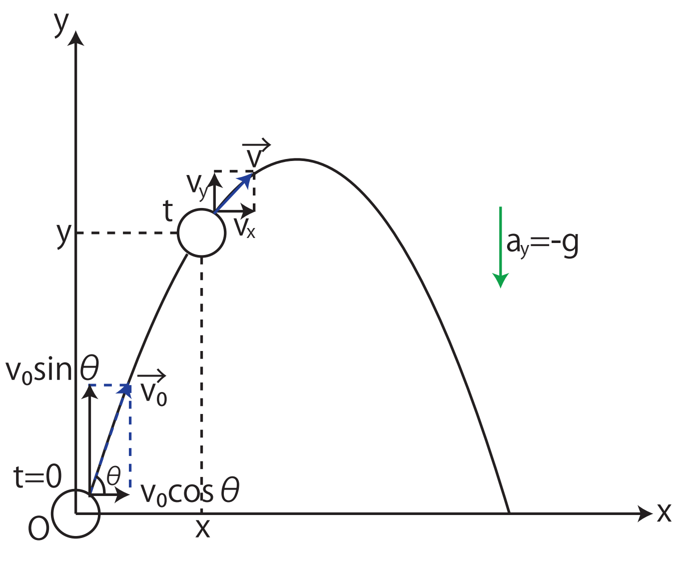


Figure 8.5: 放物運動 2

$$v_x = v_0 \cos\theta$$
$$x = v_0 \cos\theta \cdot t$$

y 方向は初速度 $v_0 \sin\theta[m/s]$，加速度 $a_y = -g[m/s^2]$ の等加速度運動をするので，鉛直投げ上げと同じになります.（鉛直投げ上げの場合と同様に，y 軸は上向きにとりました.）したがって，次式が成立します.

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$
$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

時間 $t[s]$ を消去して，x と y の関係を求めると次のようになります.

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$
$$\therefore y = v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}g(\frac{x}{v_0 \cos\theta})^2$$
$$\therefore y = \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}x^2$$

最後の関係式は図の中の物体が描く軌跡の方程式を意味しています．この式で，$y = 0$ とおくと，

$$\tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}x^2 = 0$$
$$\therefore x(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}x - \tan\theta) = 0$$
$$\therefore x = 0 \text{ or } \tan\theta\frac{2v_0^2 \cos^2\theta}{g}$$
$$\therefore x = 0 \text{ or } \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

となります．したがって，水平到達距離 $L[m]$ は次のようになります.

$$L = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$
$$= \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

故に，$L[m]$ が最大値をとるときの $\theta[rad]$ は，

$$2\theta = \frac{\pi}{2}$$
$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

というよく知られた結果になります.

8.5 力学的エネルギー保存則

落体の運動においては，保存力である重力のみがはたらいているので，力学的エネルギーが保存します．ただし，空気の抵抗力が無視できない場合は，熱が発生し力学的エネルギー

は減少します.

J Simplicity HOME

http://www.jsimplicity.com/

Chapter 9

例3（等速円運動）

9.1　等速円運動の角速度・速度・加速度

一定の速さ $v[m/s]$ の円運動である等速円運動について考えてみましょう．この運動の例としては天井から糸で下げられた円錐振り子，回転する円盤上の物体，惑星の公転運動（厳密に言うと楕円運動ですが，近似して考えて下さい.），磁場中で円運動する荷電粒子，原子内の電子の円運動等が挙げられます．物体と円の中心とを結ぶ動径が単位時間に回転する

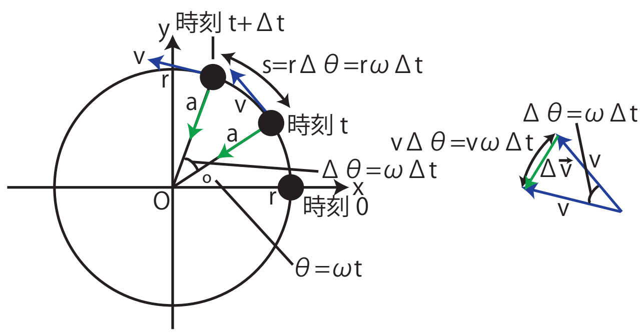


Figure 9.1: 等速円運動

角を角速度と言います．すなわち，角速度は $\omega[rad/s]$ は，$\Delta t[s]$ あたりの回転角を $\Delta\theta[rad]$ として次のように定義されます．

定義 9.1 (角速度) $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

この定義によると，回転角 $\Delta\theta[rad]$ は $\Delta\theta = \omega\Delta t[rad]$ なので，円周に沿っての道のり $s[m]$ は $s = r\Delta\theta = r\omega\Delta t[m]$ になります．よって，物体の速さ $v[m/s]$ は，

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \\
&= \frac{r\omega\Delta t}{\Delta t} \\
&= r\omega
\end{aligned}
$$

です．ただし，速度の向きは円の接線方向です．図のように，速度の変化量 $\Delta\vec{v}[m/s]$ は，緑色の矢印で表されますが，$\Delta t[s]$ が微小のとき，速度の変化量の大きさ $|\Delta\vec{v}[m/s]|$ は円弧の長さ $v\Delta\theta = v\omega\Delta t[m]$ に近似されます．故に，加速度の大きさ $a[m/s^2]$ は，

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \\
&\cong \frac{v\omega\Delta t}{\Delta t} \\
&= v\omega
\end{aligned}
$$

ですから，

$$
a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}
$$

となります．また，図からわかるように，$\Delta t[s]$ を $0[s]$ に近づける極限で，$\Delta\vec{v}[m/s]$ の向きと速度ベクトルの向きは垂直になりますので，速度の変化量 $\Delta\vec{v}[m/s]$ の向きと一致している加速度の向きは，円の中心方向になることが理解されます．

等速円運動の加速度大きさと向きを求めるには，x 座標と y 座標をとって考えることもできます．$t = 0[s]$ での物体の位置を，$(x, y) = (r, 0)$ とすると，図より，

$$
x = r\cos\omega t
$$

$$
y = r\sin\omega t
$$

と表せますが，これらの式を時間で微分していき，速度，加速度を求めます．速度の x 成分と y 成分は，

$$
\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt} = -r\omega\sin\omega t \\
v_y &= \frac{dy}{dt} = r\omega\cos\omega t
\end{aligned}
$$

です．よって，加速度の x 成分と y 成分は，

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t \\
a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -r\omega^2\sin\omega t
\end{aligned}
$$

となります．これらの式より，加速度の大きさ $a[m/s^2]$ は，

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\
&= \sqrt{r^2\omega^4(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)} \\
&= r\omega^2 = \frac{v^2}{r}
\end{aligned}
$$

となることが確認されます．また，

$$
\begin{aligned}
\frac{a_y}{a_x} &= \frac{-r\omega^2\sin\omega t}{-r\omega^2\cos\omega t} \\
&= \tan\omega t \\
&= \tan\theta
\end{aligned}
$$

となります．故に，加速度の向きは円の中心方向になることが理解されます．この円の中心方向への加速度のことを向心加速度と言います．

9.2 向心力と力学的エネルギー保存則・角運動量保存則

等速円運動では，円の中心方向に向心加速度が生じていますが，ここで，運動方程式より，加速度の原因となる力が円の中心方向にはたらいていることになります．この力のことを向心力と言います．向心力の例を挙げておきましょう．天井から糸で下げられた円錐振り子の場合は，糸の張力の水平成分が向心力の役目をします．回転する円盤の上の物体については，静止摩擦力が向心力の役目をします．惑星の公転運動では重力（万有引力）が向心力の役目をします．磁場中で円運動する荷電粒子の場合は，ローレンツ力が向心力の役目をします．原子内での電子の円運動ではクーロン力が向心力の役目をします．

等速円運動の場合，運動の向きである速度の向きは円の接線方向です．それに対して向心力は円の中心方向にはたらきます．したがって，運動の向きと力の向きは垂直の関係にあり，仕事は $0[J]$ になります．そこで，力学的エネルギー保存則が成立するのですが，確かに，速さが一定で，運動エネルギーは変化していないことはすぐにわかります．

また，向心力は円の中心方向にはたらくといいましたが，円の中心は回転軸です．従って，モーメントは $0[N\cdot m]$ なので，角運動量保存則も成立します．物体が xy 平面上で等速円運動しているとき，確かに，角運動量の向きは z 軸方向で変わらず，その大きさも変化しないことが理解できます．

Chapter 10

例4（調和振動子）

10.1 調和振動子

ばねの弾性力の大きさ $F[N]$ について，次式で表されるフックの法則が成立します．

$$F = kx$$

ここで，$x[m]$ はばねの伸びまたは縮み，$k[N/m]$ はばね定数です．さて，ばねの一端を固定し，他端に物体を付けて水平方向において振動させせます．このときの系を水平ばね振り子と言います．この場合の運動方程式は，力の向きも考慮して次のようになります.（力は常に振動の中心 O の向きに働き，その大きさは変位 $x[m]$ の大きさに比例します．このような力を復元力と言います.）

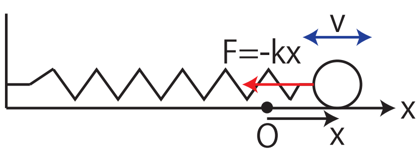


Figure 10.1: 水平ばね振り子

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

故に，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{10.1}$$

となります．物体に復元力が働き，微分方程式が (10.1) 式の形で表されるとき，この物体系を調和振動子といい，そのときの運動を単振動と言います．水平ばね振り子は調和振動子です．

次の例として，ばねを鉛直方向に吊るし，上端を固定し下端に物体を取り付け，振動させる場合を考えましょう．このときの系を鉛直ばね振り子と言います．この場合，物体に働く力 $F[N]$ は x 軸を下向きにとって，次のようになります．

$$
\begin{aligned}
F &= mg - k(d + x) \\
&= -kx
\end{aligned}
$$

ここで，$mg[N]$ は重力，$d[m]$ は自然長からつりあいの位置までの長さ，$x[m]$ はつりあいの位置からの物体の変位です．また，式の変形にはつりあいの位置において，$mg = kd$ が成立することを用いました．この力 $F[N]$ は復元力であり，水平ばね振り子の場合と同じ式になっています．従って，鉛直ばね振り子の場合も微分方程式は (10.1) 式になり，調和振動子であることが理解されます．

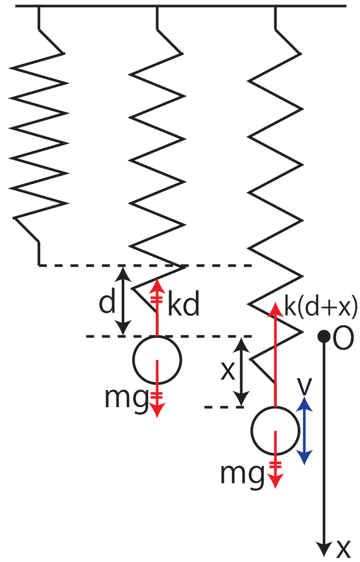


Figure 10.2: 鉛直ばね振り子

3 番目の例として，天井から糸を吊るし，下端に物体を付け，重力によって振動させる場合を考えましょう．この系を単振り子といいます．ここで，鉛直方向と糸のなす角を $\theta[rad]$，糸の張力を $T[N]$，糸の長さを $\ell[m]$ とします．また，水平方向に x 軸，鉛直下向きに y 軸をとります．このとき，運動方程式は x 方向，y 方向について，それぞれ次のようになります．

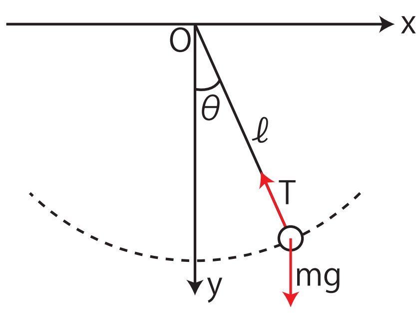


Figure 10.3: 単振り子

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= -T\sin\theta \\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= mg - T\cos\theta
\end{aligned}
$$

この単振り子の運動は拘束運動ですが，軌道は次式で表せます．

$$x = \ell \sin\theta$$

$$y = \ell \cos\theta$$

これら 4 式を連立して厳密に解くことはできますが，ここでは $\theta[rad]$ が小さい場合を考え，

$$\sin\theta \cong \theta$$

$$\cos\theta \cong 1$$

の近似を使うことにします．x 方向の運動方程式は，

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} \cong -T\theta$$

となり，y 方向の運動方程式は，

$$0 \cong mg - T$$

となります．従って，以下のように計算されます．

$$\begin{aligned} m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} &\cong -mg\theta \\ \therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} &\cong -\frac{g}{\ell}\theta \\ \therefore \frac{d^2(\ell\theta)}{dt^2} &\cong -\frac{g}{\ell}(\ell\theta) \end{aligned}$$

故に，

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cong -\frac{g}{\ell}x \tag{10.2}$$

が成立します．微分方程式 (10.2) 式は，(10.1) 式と同形になっています．したがって，単振り子も調和振動子であることがわかります．

10.2　微分方程式の複素数を使った解法

水平および鉛直ばね振り子について，(10.1) 式の微分方程式を解くことにしましょう．この方程式は定数係数の同次 2 階線形微分方程式であり，複素数を使った解法で取り扱ってみます．いま，(10.1) 式，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

を変形して，

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{10.3}$$

と，同次線形微分方程式の形にします．ただし，

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

とおきました.（このとき，もとの運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x$$

という形になります.）

いま，$x(t)$ と $y(t)$ を実関数として，

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

という複素関数をつくり，(10.3) 式と同形の微分方程式を書いてみると，

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0 \tag{10.4}$$

となります．少し変形して，

$$\frac{d^2}{dt^2}(x + iy) + \omega^2(x + iy) = 0$$
$$\therefore (\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x) + i(\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y) = 0$$

となりますが，最後の式が成立するためには，実数部と虚数部それぞれについて，

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

でなければなりません．すなわち，解 $z(t)$ を求めれば，その実数部 $x(t)$ および虚数部 $y(t)$ は，それぞれ微分方程式を満たします．従って，解 $z(t)$ の実数部が (10.3) 式の解になります．一般に，複素数の微分方程式を解き，その解の実数部をもとの微分方程式の解にすることができます．ここで，

$$z = \alpha e^{\lambda t}$$

とおき，(10.4) 式に代入します．このとき，つくられる方程式を特性方程式といいます.（α と λ は複素数の定数です.）

$$\alpha\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 \alpha e^{\lambda t} = 0$$

この特性方程式はすぐに解けて，

$$\lambda^2 = -\omega^2$$

$$\therefore \lambda = \pm i\omega$$

が求められます．故に，(10.4) 式の解は，

$$z = \alpha_1 e^{i\omega t} + \alpha_2 e^{-i\omega t}$$

となります．ここで，実数 a_1, b_1, a_2, b_2 を使い，さらに指数関数を三角関数で表して変形します．

$$\begin{aligned} z &= (a_1 + ib_1)(\cos\omega t + i\sin\omega t) + (a_2 + ib_2)(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\ &= \{(-b_1 + b_2)\sin\omega t + (a_1 + a_2)\cos\omega t\} + i\{(a_1 - a_2)\sin\omega t + (b_1 + b_2)\cos\omega t\} \end{aligned}$$

ここで，(10.3) 式の解は最後の式の実数部になります．

$$A_1 \equiv -b_1 + b_2$$

$$A_2 \equiv a_1 + a_2$$

とおいて，

$$x = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t$$

が求められます．一般に，特性方程式の解が純虚数の解のとき，同次微分方程式の一般解は正弦関数と余弦関数の和になります．三角関数の公式を使い，更に変形して，

$$x = A\sin(\omega t + \theta_0) \tag{10.5}$$

となります．ただし，

$$A \equiv \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$$\tan\theta_0 \equiv \frac{A_2}{A_1}$$

とおきました．(10.5) 式の変位 $x[m]$ は，丁度等速円運動している物体に横から光をあてたときの影の運動に一致します．このことは，図を見れば理解できると思います．図より，$A[m]$ は振幅です．また，$\omega t + \theta_0[rad]$ は等速円運動の回転角になりますが，これを位相といいます．位相の中の $\omega[rad/s]$ は等速円運動の角速度ですが，これを角振動数と呼び，$\theta_0[rad]$ は時間 $t = 0[s]$ の回転角（すなわち位相）であるので，初期位相といいます．1 回振動する時間を周期 $T[s]$ といいますが，このとき，位相は $2\pi[rad]$ 進むので，

$$\begin{aligned} \omega T &= 2\pi \\ \therefore T &= 2\pi\frac{1}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

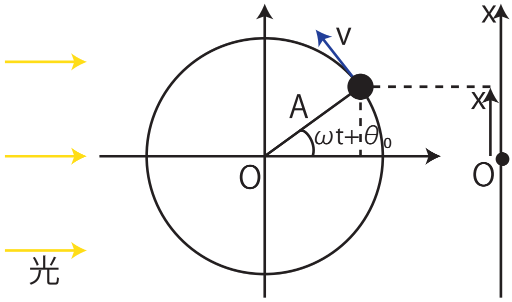


Figure 10.4: 調和振動子

となります．また，(10.5) 式を時間 $t[s]$ で微分して振動の速度 $v[m/s]$ を求め，さらにもう一度時間 $t[s]$ で微分して加速度 $a[m/s^2]$ を求めておきます．

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{dx}{dt} \\
&= A\omega\cos(\omega t + \theta_0) \\
a &= \frac{dv}{dt} \\
&= -A\omega^2\sin(\omega t + \theta_0) \\
&= -\omega^2 \cdot A\sin(\omega t + \theta_0) \\
&= -\omega^2 x
\end{aligned}
$$

水平および鉛直ばね振り子の場合は以上ですが，単振り子の場合はどうなるでしょうか？(10.1) 式と (10.2) 式を比較して，単振り子の場合は，

$$
\frac{k}{m} \to \frac{g}{\ell}
$$

の，置き換えをすればよいことがわかります．したがって，変位 $x[m]$ を表す式はばね振り子の場合と同様になり，角振動数 $\omega[rad/s]$ と周期 $T[s]$ は，

$$
\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}
$$

$$
T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}
$$

となります．

10.3 力学的エネルギー保存則

理想的な調和振動子については，保存力である弾性力，あるいは重力以外の力が働いていないので，力学的エネルギーは保存し，永久に振動を続けます．しかし，現実には空気の

抵抗力，摩擦力が働き熱が発生します．あるは，ばねや糸も発熱します．したがって，現実には力学的エネルギーは減少し，いずれ振動は止まることになります．熱が発生しない理想的な調和振動子の力学的エネルギー $E[J]$ を求めてみましょう．力学的エネルギー $E[J]$ は，運動エネルギーと弾性エネルギーの和であるので，次のように計算されます．

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}m\{A\omega\cos(\omega t + \theta_0)\}^2 + \frac{1}{2}(m\omega^2)\{A\sin(\omega t + \theta_0)\}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\{\sin^2(\omega t + \theta_0) + \cos^2(\omega t + \theta_0)\} \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \end{aligned}$$

すなわち，調和振動子の力学的エネルギー $E[J]$ は，角振動数 $\omega[rad/s]$ の 2 乗と振幅 $A[m]$ の 2 乗に比例することがわかります．このように，理想的な調和振動子について力学的エネルギーは定数になっていて，確かに保存することが理解されます．

J Simplicity HOME

`http://www.jsimplicity.com/`

Chapter 11

例5（惑星の運動）

11.1　惑星の運動

惑星の運動についての研究は，力学成立の歴史に深い繋がりがあります．1576 年，デンマークのティコ・ブラーエは天体の観測を開始し，精密なデータを残しました．その後，ティコ・ブラーエの弟子のケプラーは，観測データをもとに試行錯誤を繰り返した後，1609 年にケプラーの第一，第二法則を発見しました．さらに，1619 年にケプラーの第三法則を発見しています．ケプラーの三法則を踏み台にして，ニュートンは万有引力の法則を発見し，ニュートンの三法則とあわせて力学を創り上げました．1687 年には，力学の集大成である有名なプリンキピアを出版しています．ここに，物理法則発見の典型的なパターンがあることに注目して下さい．実験結果からケプラーの三法則という規則性を見出し，さらにニュートンの力学へと本質的な発展を遂げています．一旦，ニュートン力学が成立すると，逆にニュートン力学からケプラーの三法則を導けることも確認できます．

歴史は繰り返すといいますが，19 世紀から 20 世紀初頭にかけての量子力学の成立も，同様な発展をしているのは興味深いことです．すなわち，まず 1890 年，リュードベリは実験結果から帰納して，水素原子のスペクトルの一般公式を発表しました．その公式を解明するものとして，1913 年にボーアは水素原子構造理論を提案しました．このあたりの理論は前期量子論といいます．そして本質を捉えた真の理論として，1925 年のハイゼンベルクによる量子力学（行列による表示），1926 年のシュレディンガーによる量子力学（波動による表示）が打ち立てられました．また，完成された量子力学から水素原子のスペクトルを説明することもできます．自然法則は現象論的な法則の発見から，より深い本質的な法則の発見へと繋がっていくのです．

11.2　ケプラーの法則から万有引力の法則へ

ケプラーの三法則とは次のようなものです.

法則 11.1 (第一法則) “惑星は太陽を焦点の 1 つとする楕円軌道を描きます．”

法則 11.2 (第二法則（面積速度一定の法則）) “太陽と惑星を結ぶ直線が単位時間に掃過する面積は一定です．”

法則 11.3 (第三法則) “惑星が太陽の周りを回る周期 $T[s]$ の *2* 乗は楕円軌道の長半径 $a[m]$ の *3* 乗に比例します.（$T^2 = ka^3$）”

ケプラーの法則からニュートンの万有引力の法則を導いてみましょう．まず，質量 $m[kg]$ の惑星は楕円軌道を描いて運動していますが，簡単のため，この運動を半径 $r[m]$，角速度 $\omega[rad/s]$ の等速円運動に近似します.（ここで，第一法則と第二法則を使っています.）このとき，円の中心方向への加速度の原因となる力の役目をするものが必要ですが，それは不明です．とりあえず，この力が太陽からの引力 $F[N]$ であるとして，その大きさを求めましょう.

$$
\begin{aligned}
F &= mr\omega^2 \\
&= mr(\frac{2\pi}{T})^2 \\
&= mr\frac{4\pi^2}{kr^3}
\end{aligned}
$$

最後の変形には第三法則を用いました．式の変形を続けて，

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{m}{r^2} \\
&= C\frac{m}{r^2}
\end{aligned}
$$

となります．ただし，

$$C \equiv \frac{4\pi^2}{k}$$

と，おきました．ここで，作用・反作用の法則より，惑星が太陽に引かれているならば，太陽も惑星に引かれているはずです．したがって，$F[N]$ は太陽の質量 $M[kg]$ にも比例するはずです．よって，

$$F = C'\frac{Mm}{r^2}$$

の形の引力が惑星と太陽の間に働いています．ここで，ニュートンは一つの飛躍をします．太陽と惑星の間に働いている引力は，地球上の物体と地球が引き合っている力と同じものではないかと思い付いたのです．さらに，質量があるもの全て，万物には引力が働くもの

とし，万有引力という考えに到達したのです．有名なリンゴの木のエピソードは真偽の程は明らかではありませんが，リンゴが木から落ちるのを見たニュートンが，リンゴと地球が引き合っているということを思いつき，それが万物が引き合っている力の一つであることを見抜いたと言われます．ニュートンは天上の法則と地上の法則を統一したのです．万有引力の法則を再掲しておきます．

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{11.1}$$

11.3 ニュートン力学からケプラーの法則へ

一旦，万有引力の法則とニュートンの三法則からなるニュートン力学が成立すると，それからケプラーの法則が導かれることを確認しましょう．まず準備として，中心力が働く場合の 2 次元の運動を極座標で取り扱っておきます．座標軸 (x, y) を平面極座標 (r, ϕ) で表します．

$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\sin\phi$$

x と y を時間で微分します．

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt}\cos\phi - \frac{d\phi}{dt}r\sin\phi \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt}\sin\phi + \frac{d\phi}{dt}r\cos\phi\end{aligned}$$

さらに，もう一回時間で微分します．

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2}\cos\phi - \frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\sin\phi - \frac{d^2\phi}{dt^2}r\sin\phi - \frac{d\phi}{dt}\frac{dr}{dt}\sin\phi - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\cos\phi \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2}\sin\phi + \frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\cos\phi + \frac{d^2\phi}{dt^2}r\cos\phi + \frac{d\phi}{dt}\frac{dr}{dt}\cos\phi - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\sin\phi\end{aligned}$$

形を整えると次のようになります．

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2}\cos\phi - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\sin\phi - \frac{d^2\phi}{dt^2}r\sin\phi - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\cos\phi \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2}\sin\phi + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\cos\phi + \frac{d^2\phi}{dt^2}r\cos\phi - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\sin\phi\end{aligned}$$

動径方向に働く中心力の大きさを $f(r)$ とすると，運動方程式の x 成分と y 成分は次のようになります．

$$\begin{aligned}m\frac{d^2x}{dt^2} &= f(r)\cos\phi \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= f(r)\sin\phi\end{aligned}$$

この２つの式から，次のように変形されます.

$$m(\frac{d^2x}{dt^2}\cos\phi + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\phi) = f(r) \tag{11.2}$$

$$m(\frac{d^2x}{dt^2}\sin\phi - \frac{d^2y}{dt^2}\cos\phi) = 0 \tag{11.3}$$

(11.2) 式は次のようになります.

$$\begin{aligned}
&m[\{\frac{d^2r}{dt^2}\cos\phi - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\sin\phi - \frac{d^2\phi}{dt^2}r\sin\phi - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\cos\phi\}\cos\phi \\
&\quad + \{\frac{d^2r}{dt^2}\sin\phi + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\cos\phi + \frac{d^2\phi}{dt^2}r\cos\phi - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\sin\phi\}\sin\phi] = f(r) \\
&\therefore m[\{\frac{d^2r}{dt^2}\cos^2\phi - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\sin\phi\cos\phi - \frac{d^2\phi}{dt^2}r\sin\phi\cos\phi - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\cos^2\phi\} \\
&\quad + \{\frac{d^2r}{dt^2}\sin^2\phi + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\sin\phi\cos\phi + \frac{d^2\phi}{dt^2}r\sin\phi\cos\phi - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\sin^2\phi\}] = f(r) \\
&\therefore m\{\frac{d^2r}{dt^2} - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\} = f(r)
\end{aligned}$$

(11.3) 式を変形します.

$$\begin{aligned}
&m[\{\frac{d^2r}{dt^2}\cos\phi - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\sin\phi - \frac{d^2\phi}{dt^2}r\sin\phi - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\cos\phi\}\sin\phi \\
&\quad - \{\frac{d^2r}{dt^2}\sin\phi + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\cos\phi + \frac{d^2\phi}{dt^2}r\cos\phi - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\sin\phi\}\cos\phi] = 0 \\
&\therefore m[\{\frac{d^2r}{dt^2}\sin\phi\cos\phi - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\sin^2\phi - \frac{d^2\phi}{dt^2}r\sin^2\phi - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\sin\phi\cos\phi\} \\
&\quad - \{\frac{d^2r}{dt^2}\sin\phi\cos\phi + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\cos^2\phi + \frac{d^2\phi}{dt^2}r\cos^2\phi - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\sin\phi\cos\phi\}] = 0 \\
&\therefore m(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt} + \frac{d^2\phi}{dt^2}r) = 0
\end{aligned}$$

惑星の運動の場合，中心力 $f(r)$ として万有引力が働くので，微分方程式は，それぞれ次のようになります.

$$m\{\frac{d^2r}{dt^2} - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\} = -G\frac{Mm}{r^2} \tag{11.4}$$

$$m(2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt} + \frac{d^2\phi}{dt^2}r) = 0 \tag{11.5}$$

ここで，(11.5) 式は次のように変形されます.

$$\begin{aligned}
&2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt} + \frac{d^2\phi}{dt^2}r = 0 \\
&\therefore \frac{d}{dt}(r^2\frac{d\phi}{dt}) = 0
\end{aligned}$$

時間で積分すると，次の式が成立します.

$$r^2\frac{d\phi}{dt} = h\,(const) \tag{11.6}$$

ここで，時間 $dt[s]$ の間に惑星の動径が掃過する面積は，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(r+dr)rd\phi &= \frac{1}{2}r^2d\phi + \frac{1}{2}rdrd\phi \\
&\cong \frac{1}{2}r^2d\phi
\end{aligned}
$$

となります.（図を参照して下さい.）従って，惑星の動径が単位時間に掃過する面積（面積

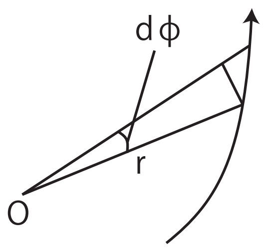


Figure 11.1: 面積速度 1

速度）は，

$$
\frac{1}{2}r^2\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}h
$$

となり，これは (11.6) 式より一定です．すなわち，ケプラーの第二法則が導出されました.

ここで，ケプラーの第二法則は，角運動量保存則から導出されることも見ておきましょう．面積速度の大きさは，下図の惑星が微小時間 $dt[s]$ の間に掃過する 3 角形 ORS の面積

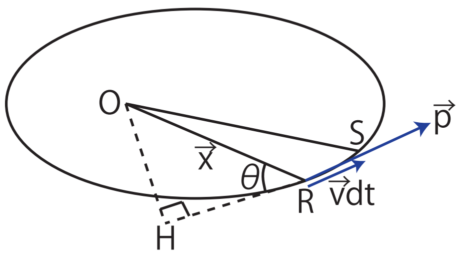


Figure 11.2: 面積速度 2

を $dt[s]$ で割り，次のように求められます.

$$
\frac{\frac{1}{2}vdt \cdot OH}{dt} = \frac{1}{2}v \cdot OH
$$

一方，惑星の角運動量の大きさは，

$$\begin{aligned}|\vec{L}| &= |\vec{x} \times \vec{p}| \\ &= |\vec{x}| p \sin\theta \\ &= p \cdot OH \\ &= mv \cdot OH\end{aligned}$$

となりますので，面積速度の大きさは，

$$\frac{1}{2m}|\vec{L}|$$

と表せます．したがって，中心力を受けて運動する物体の角運動量は保存することから，惑星の面積速度が一定になることが証明されました．

次に，(11.4) 式，

$$m\{\frac{d^2r}{dt^2} - (\frac{d\phi}{dt})^2 r\} = -G\frac{Mm}{r^2}$$

を変形します．

$$\frac{d^2r}{dt^2} - (\frac{d\phi}{dt})^2 r = -G\frac{M}{r^2} \tag{11.7}$$

となりますが，ここで，$r[m]$ は $\phi[rad]$ を通して時間の関数なので，

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}$$

が成立します．ここで，(11.6) 式，

$$r^2\frac{d\phi}{dt} = h\,(const)$$

より，

$$\frac{dr}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi}$$

となります．さらに，

$$u \equiv \frac{1}{r}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\phi} &= \frac{du}{dr}\frac{dr}{d\phi} \\ &= -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\end{aligned}$$

ですから，

$$\frac{dr}{d\phi} = -r^2\frac{du}{d\phi}$$

となります．したがって，

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\phi} \\ &= \frac{h}{r^2}(-r^2\frac{du}{d\phi}) \\ &= -h\frac{du}{d\phi}\end{aligned}$$

ですから，

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h\frac{d^2u}{d\phi^2}\frac{d\phi}{dt}$$

となります．ここで，(11.6) 式，

$$r^2\frac{d\phi}{dt} = h\,(const)$$

を使って，

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2} &= -h\frac{d^2u}{d\phi^2}(\frac{h}{r^2}) \\ &= -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\phi^2}\end{aligned}$$

となります．このとき，(11.7) 式は (11.6) 式をもう一度使って，次のように計算されます．

$$\begin{aligned}&\frac{d^2r}{dt^2} - (\frac{d\phi}{dt})^2 r = -G\frac{M}{r^2} \\ &\therefore -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\phi^2} - (\frac{h}{r^2})^2 r = -G\frac{M}{r^2} \\ &\therefore \frac{d^2u}{d\phi^2} + \frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}\end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} \tag{11.8}$$

となります．(11.8) 式は定数係数の 2 階線形非同次部分方程式になっています．解法は右辺を 0 とおいた同次方程式の解と (11.8) 式の特解の和で求めることができます．同次方程式は，

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0 \tag{11.9}$$

となりますが，この式は “例 4（調和振動子）” の Chapter で取り扱った調和振動子の微分方程式，

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

と同形になっています．この方程式の解は，

$$x = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t$$

となっていました．この解において，$x \to u$，$\omega \to 1$，$t \to \phi$ と置き換え，同次方程式 (11.9) 式の解は，

$$u = A_1 \sin\phi + A_2 \cos\phi \tag{11.10}$$

となります．また，(11.8) 式，

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2}$$

の特解の一つとして，

$$u_0 = \frac{GM}{h^2} \tag{11.11}$$

があることが，直ちにわかります．従って，(11.8) 式の解は，(11.10) 式と (11.11) 式の和になり，

$$u = \frac{GM}{h^2} + A_1 \sin\phi + A_2 \cos\phi$$

ここで，簡単のため，$\phi = 0$ において，惑星が太陽から最も遠くに位置する，つまり，$r[m]$ が最大値をとるものとします．このとき，u は最小値をとりますので，

$$\frac{du}{d\phi} = 0$$

の条件が成立します．よって，

$$\frac{du}{d\phi} = 0 + A_1 \cos 0 - A_2 \sin 0 = A_1 = 0$$

になりますので，(11.8) 式の解は，

$$\begin{aligned}
u &= \frac{GM}{h^2} + A_2 \cos\phi \\
\therefore \frac{1}{r} &= \frac{GM}{h^2} + A_2 \cos\phi \\
\therefore r &= \frac{1}{\dfrac{GM}{h^2} + A_2 \cos\phi} \\
\therefore r &= \frac{\dfrac{h^2}{GM}}{1 + \dfrac{h^2 A_2}{GM}\cos\phi}
\end{aligned}$$

となりますが，

$$\begin{aligned}
\ell &\equiv \frac{h^2}{GM} \\
\varepsilon &\equiv \frac{h^2 A_2}{GM}
\end{aligned}$$

とおくと，軌道の方程式は，

$$r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon\cos\phi}$$

となります．この式は，原点を焦点とする楕円（$\varepsilon < 1$），放物線（$\varepsilon = 1$），双曲線（$\varepsilon > 1$）を表しています．ケプラーの第一法則が導かれました．

楕円の半長軸を $a[m]$，半短軸を $b[m]$ とすれば，

$$b^2 = \ell a$$

の関係が成立します．したがって，楕円の面積 $S[m^2]$ は，

$$\begin{aligned} S &= \pi ab \\ &= \pi\sqrt{\ell a^3} \\ &= \pi\sqrt{\frac{h^2}{GM}a^3} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{GM}}ha^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となります．周期 $T[s]$ は楕円の面積 $S[m^2]$ を面積速度 $h/2[m^2/s]$ で割れば求められます．

$$\begin{aligned} T &= \frac{S}{h/2} \\ &= \frac{\frac{\pi}{\sqrt{GM}}ha^{\frac{3}{2}}}{h/2} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}} \\ &\propto a^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

故に，次式が成立します．

$$T^2 = ka^3$$

ただし，k は比例定数です．ケプラーの第三法則が導かれました．ケプラーの三法則は全て，ニュートン力学から導出することができたのです．

J Simplicity HOME

`http://www.jsimplicity.com/`

Chapter 12

相対運動

12.1　ガリレイ変換

慣性の法則が成立する座標系を慣性系といいます．慣性系においては運動の法則（運動方程式）が成立します．ここで，一つの慣性系に対して等速直線運動をする座標系の物理を考えましょう．例えば，地面の水平方向は良い近似で慣性系ですが，その上で等速直線運動する列車を想定します．まず，列車の中で列車に対して静止している物体を考えます．このとき，地面にいる観測者に対しては，動いている物体は等速直線運動を続けるという意味で慣性の法則が成立しています.（図 “慣性系 1” を参照して下さい.）列車にいる観測者

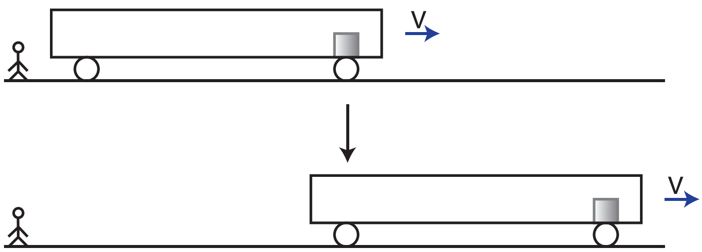


Figure 12.1: 慣性系 1

に対しては，静止している物体は静止を続けるという意味で慣性の法則が成立しています.（図 “慣性系 2” を参照して下さい.）もし，列車の中の床がなめらかで摩擦が無視できる場合，列車の中の物体が地面に対して静止し，列車に対して後ろ向きに等速直線運動をするときも，両座標系において慣性の法則が成立しています．このことは，地面にいる観測者に対しては，静止している物体は静止を続けるという意味において言えることです.（図 “慣性系 3” を参照して下さい.）列車にいる観測者に対しては，動いている物体は等速直線

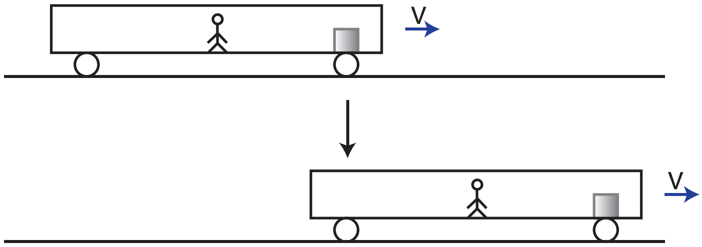


Figure 12.2: 慣性系 2

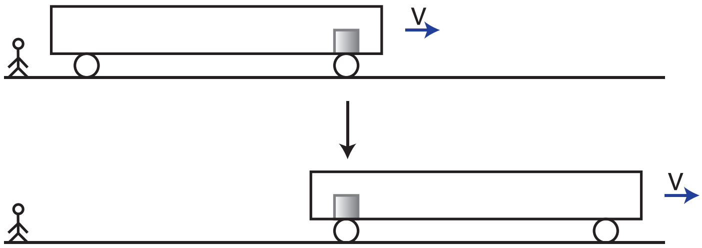


Figure 12.3: 慣性系 3

運動を続けるという意味において，慣性の法則が成立しています.（図 “慣性系 4” を参照して下さい.）このように，

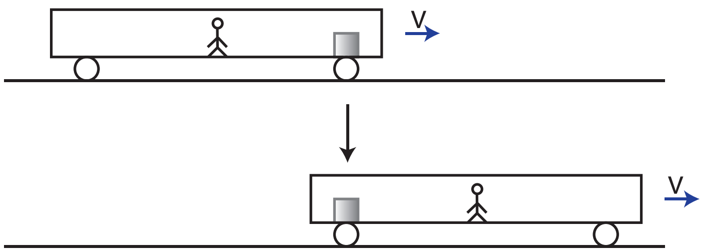


Figure 12.4: 慣性系 4

原理 12.1 (ガリレイの相対性原理) “ 1 つの慣性系に対して等速直線運動をしている座標系はやはり慣性系です． ”

という原理が成立します．これをガリレイの相対性原理といいます．

上記の記述をやや一般的にします．慣性系 (x, y, z) に対して，x 方向に相対速度 $v[m/s]$（一定）で動いている座標系 (x', y', z') を考えます．慣性系 (x, y, z) について，運動方程式，

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}$$

が成立します．また，簡単のため，図のように，x 軸と x' 軸は重なっていて，(x',y',z') の座標系はその方向に等速直線運動しているものとします．このときの両座標系の間の関係

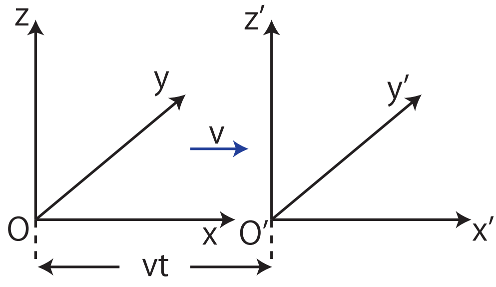


Figure 12.5: ガリレイ変換

式は，次のようになります．

$$x' = x - vt \tag{12.1}$$

$$y' = y \tag{12.2}$$

$$z' = z \tag{12.3}$$

(12.1) 式〜(12.3) 式で表される座標変換をガリレイ変換といいます．ガリレイ変換に対して，各座標を時間で微分していくと，次のようになります．

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v$$
$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}$$
$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

故に，

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$
$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$$
$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

となります．したがって，座標系 (x',y',z') についても，運動方程式，

$$m\frac{d^2\vec{x'}}{dt^2} = \vec{F}$$

が成立します．運動方程式が成立する座標系は慣性系ですから，座標系 (x',y',z') も慣性系になります．つまり，ガリレイの相対性原理が成り立つことになります．

ニュートン力学における相対性については，上記のようにガリレイ変換を考えますが，実は特殊相対性理論においては，ローレンツ変換という座標変換を取り扱うことになります．詳しくは “相対性理論” の Report をご覧ください．

12.2 並進運動

一つの慣性系に対して等加速度直線運動する座標系の物理を考えましょう．例えば，水平方向がよい近似で慣性系である地面の上で，等加速度直線運動する列車を想定します．列車の中に物体を置き，ばねを取り付けておきます．列車が加速運動するとき，ばねは伸びることが観測されます．この状況について，地面にいる観測者にとっての物理と，列車に乗り込んだ観測者にとっての物理について考えてみます．地面にいる観測者は，ばねの弾性力 $F[N]$ が原因で物体が等加速度直線運動すると観測します.（図 “慣性力 1” を参照して下さい.）そのとき，成立する運動方程式は物体の質量を $m[kg]$，列車の加速度を $a[m/s^2]$ として，次式になります.

$$ma = F \tag{12.4}$$

一方，列車に乗り込んだ観測者には，物体は静止して見えます．しかし，この場合もばね

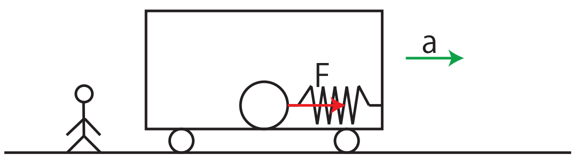


Figure 12.6: 慣性力 1

の弾性力 $F[N]$ は働いており，このままでは力はつりあうことができません．そこで，列車の加速度の向きと逆向きに，見かけの力として慣性力といわれるものを導入することにしましょう.（図 “慣性力 2” を見て下さい.）この慣性力を $F'[N]$ とすると，成立するつりあいの式は,

$$F' = F \tag{12.5}$$

となります．(12.4) 式と (12.5) 式から（向きまで考慮して），慣性力 $F'[N]$ は,

$$F' = -ma$$

と表されます.

上記の物理を一般的に取り扱ってみましょう．慣性系 (x, y, z) に対して，加速運動している座標系 (x', y', z') をとります．座標系 (x', y', z') が回転しておらず，慣性系 (x, y, z) と座

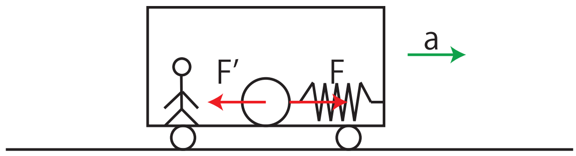


Figure 12.7: 慣性力 2

標系 (x', y', z') の座標軸が平行である場合を考えます．このとき，

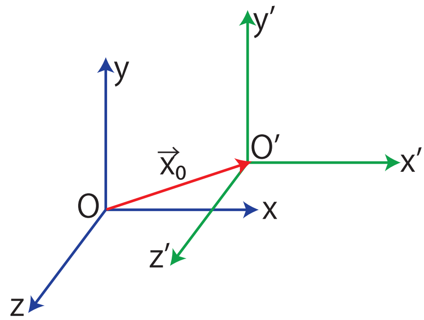


Figure 12.8: 並進運動

$$x = x_0 + x'$$
$$y = y_0 + y'$$
$$z = z_0 + z'$$

すなわち，

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x'}$$

が成立します．慣性系 (x, y, z) に対しては，運動方程式，

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}$$

が成立します．ここで，

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{x}_0}{dt^2} + \frac{d^2\vec{x'}}{dt^2}$$

が成り立つので，慣性系 (x,y,z) に対する運動方程式は，次のように変形されます．

$$m(\frac{d^2\vec{x}_0}{dt^2} + \frac{d^2\vec{x'}}{dt^2}) = \vec{F}$$
$$\therefore m\frac{d^2\vec{x'}}{dt^2} = \vec{F} + (-m\frac{d^2\vec{x}_0}{dt^2})$$

ここで,

$$\vec{F'} \equiv -m\frac{d^2\vec{x_0}}{dt^2}$$

とおくと,

$$m\frac{d^2\vec{x'}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{F'}$$

となります．$\vec{F'}[N]$ は見かけの力であり，慣性力です．つまり，上式が表しているものは,

- “慣性系に対して加速運動している座標系では，慣性力が現れ，これを加えれば運動方程式が成立します．”

という内容です.

慣性力は見かけの力として便宜上，力学に導入された経緯があります．しかし，この力が本物の重力と同等であるという等価原理を唱え，重力の幾何学化を実行したのがアインシュタインの一般相対性理論です．詳しくは “相対性理論” の Report をご覧下さい.

12.3 回転運動

一つの慣性系に対して，等速円運動する座標系の物理を考えましょう．例えば，水平方向がよい近似で慣性系である地面の上で等速円運動する円板を想定します．円板の中に物体をおき，ばねを取り付けておきます．円板が等速円運動するとき，物体も円板とともに等速円運動して，ばねは伸びることが観測されます．この状況について，地面にいる観測者にとっての物理と，円板に乗り込んだ観測者の物理について考えます．地面にいる観測者は，ばねの弾性力 $F[N]$ が向心力の役目をして，物体が等速円運動すると観測します.（図 “遠心力 1” を参照して下さい.）このとき，成立する円の中心方向への運動方程式は，円の

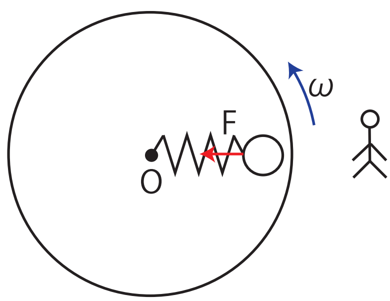


Figure 12.9: 遠心力 1

半径を $r[m]$，物体の質量を $m[kg]$，円板の角速度を $\omega[rad/s]$ として，次式であることがわかります.

$$m \cdot r\omega^2 = F \tag{12.6}$$

一方，円板に乗り込んだ観測者には，物体は静止して見えます．しかし，この場合もばねの弾性力 $F[N]$ は働いており，このままでは力はつりあうことができません．そこで，円板の外向きに，見かけの力として遠心力といわれるものを導入することにしましょう.（図 “遠心力 2” を参照して下さい.）この遠心力を $F'[N]$ とすると，成立するつりあいの式は，

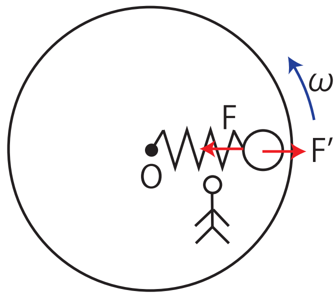


Figure 12.10: 遠心力 2

$$F' = F \tag{12.7}$$

となります．(12.6) 式と (12.7) 式から遠心力 $F'[N]$ は，

$$F' = mr\omega^2$$

と表せます．ここで，遠心力の向きは外向きです．

上記の物理をやや一般的に取り扱ってみましょう．慣性系 (x, y, z) に対して，回転運動している座標系 (x', y', z') をとります．ただし，簡単のため 2 つの座標系の原点は一致しており，回転軸は z 軸$= z'$ 軸で，ダッシュがついた座標系が反時計回りに角速度 $\omega[rad/s]$ の 2 次元回転をしている場合を考えます．慣性系 (x, y, z) に対する運動方程式は，x 成分と y 成分に分けて次のようになります．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \tag{12.8}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \tag{12.9}$$

ここで，$t = 0[s]$ で 2 つの座標系が一致していたものとすると，2 つの座標系は次式で表されます.（図 “回転運動 1” を参照して下さい.）

$$x = x' \cos\omega t - y' \sin\omega t$$

$$y = x' \sin\omega t + y' \cos\omega t$$

この 2 つの関係式を時間 $t[s]$ で微分します．

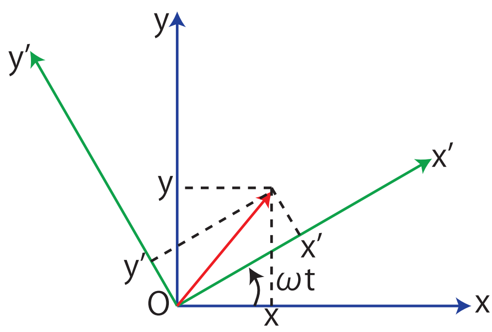


Figure 12.11: 回転運動 1

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt}\cos\omega t - \omega x'\sin\omega t - \frac{dy'}{dt}\sin\omega t - \omega y'\cos\omega t$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx'}{dt}\sin\omega t + \omega x'\cos\omega t + \frac{dy'}{dt}\cos\omega t - \omega y'\sin\omega t$$

もう一度時間 $t[s]$ で微分します.

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x'}{dt^2}\cos\omega t - \omega\frac{dx'}{dt}\sin\omega t - \omega\frac{dx'}{dt}\sin\omega t - \omega^2 x'\cos\omega t \\ &\quad - \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\omega t - \omega\frac{dy'}{dt}\cos\omega t - \omega\frac{dy'}{dt}\cos\omega t + \omega^2 y'\sin\omega t \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2x'}{dt^2}\sin\omega t + \omega\frac{dx'}{dt}\cos\omega t + \omega\frac{dx'}{dt}\cos\omega t - \omega^2 x'\sin\omega t \\ &\quad + \frac{d^2y'}{dt^2}\cos\omega t - \omega\frac{dy'}{dt}\sin\omega t - \omega\frac{dy'}{dt}\sin\omega t - \omega^2 y'\cos\omega t\end{aligned}$$

整理すると，次のようになります.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\frac{d^2x'}{dt^2} - 2\omega\frac{dy'}{dt} - \omega^2 x')\cos\omega t - (\frac{d^2y'}{dt^2} + 2\omega\frac{dx'}{dt} - \omega^2 y')\sin\omega t$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = (\frac{d^2x'}{dt^2} - 2\omega\frac{dy'}{dt} - \omega^2 x')\sin\omega t + (\frac{d^2y'}{dt^2} + 2\omega\frac{dx'}{dt} - \omega^2 y')\cos\omega t$$

一方，力については次のように変換します.（図 “回転運動 2” を参照して下さい.）

$$F_x = F_{x'}\cos\omega t - F_{y'}\sin\omega t$$

$$F_y = F_{x'}\sin\omega t + F_{y'}\cos\omega t$$

以上の議論より，慣性系 (x, y, z) における運動方程式 (12.8) 式と (12.9) 式は，次のようになります.

$$(m\frac{d^2x'}{dt^2} - 2m\omega\frac{dy'}{dt} - m\omega^2 x')\cos\omega t - (m\frac{d^2y'}{dt^2} + 2m\omega\frac{dx'}{dt} - m\omega^2 y')\sin\omega t = F_{x'}\cos\omega t - F_{y'}\sin\omega t$$
$$(m\frac{d^2x'}{dt^2} - 2m\omega\frac{dy'}{dt} - m\omega^2 x')\sin\omega t + (m\frac{d^2y'}{dt^2} + 2m\omega\frac{dx'}{dt} - m\omega^2 y')\cos\omega t = F_{x'}\sin\omega t + F_{y'}\cos\omega t$$

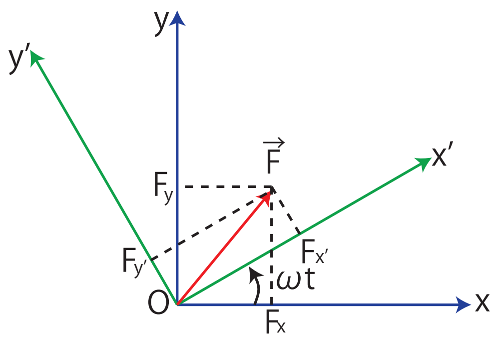


Figure 12.12: 回転運動 2

これらの式の左辺と右辺を比較して，次の 2 式を得ます．

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} - 2m\omega\frac{dy'}{dt} - m\omega^2x' = F_{x'}$$
$$m\frac{d^2y'}{dt^2} + 2m\omega\frac{dx'}{dt} - m\omega^2y' = F_{y'}$$

故に，次式が成立します．

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'} + 2m\omega\frac{dy'}{dt} + m\omega^2x' \tag{12.10}$$
$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = F_{y'} - 2m\omega\frac{dx'}{dt} + m\omega^2y' \tag{12.11}$$

(12.10) 式と (12.11) 式は座標系 (x', y', z') における運動方程式です．この式には見かけの力が 2 つ入っています．右辺第 3 項の $m\omega^2x'[N]$ と $m\omega^2y'[N]$ は，まとめて $\vec{F'} = m\omega^2\vec{x'}[N]$ と書けますが，これは遠心力です．右辺第 2 項の $2m\omega v_{y'}[N]$ と $-2m\omega v_{x'}[N]$ は，まとめて $-2m\vec{\omega}\times\vec{v'}[N]$ と書けますが，これはコリオリ力と呼ばれる力で，物体が座標系 (x', y', z') に対して運動している場合にのみ働く力です．

この Section の最後に，一つ例を挙げておきます．反時計回りに等速円運動する摩擦 $0[N]$ の円板上にある物体が，地面に対して静止し，円板に対して時計回りに等速円運動する場合を考えます．円板に乗り込んだ観測者には外向きに $F' = m\omega^2r'[N]$ の遠心力が働きます．しかし，円の中心方向に，$F'' = 2m\omega \cdot r'\omega = 2m\omega^2r'[N]$ の大きさのコリオリ力が働き，差し引き円の中心方向に $m\omega^2r'[N]$ の力が働きます．この力を向心力として，物体は円板上の観測者に対して等速円運動をするのです．

J Simplicity HOME

http://www.jsimplicity.com/

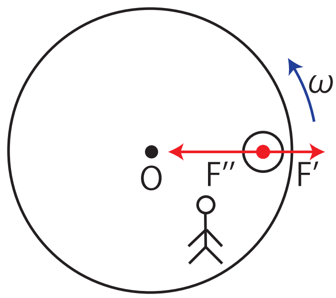


Figure 12.13: 回転運動 3