

Report 振動と波動 JS0.5

J Simplicity

February 4, 2012

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Preface

振動と波動といった現象は、身の回りで頻繁に起こっているものです。振動については、ばね振り子や単振り子といった調和振動子を基本にします。一般的な乱雑な振動についても、フーリエ解析という手法により、調和振動子に分解できることが知られています。振動の具体例として、減衰振動と強制振動、連成振動等を取り扱います。波動は媒質の各点が振動していて、その振動が伝搬する現象です。波動の基本的事項として、波動方程式と重ね合わせの原理を重点的に押えました。また、波動特有の現象である干渉、回折、反射、透過・屈折なども詳しく説明します。

現代物理学の中では、特に量子力学に関係して、ミクロ世界の量子が粒子性と波動性の2重性をもつことに重点が置かれています。究極的に考えて、あらゆる存在するものは粒子か波動かのいずれしかなく、しかもそれを同時に兼ね備えていることが、量子の本質になっています。この振動と波動の Report では、量子力学の基礎とも密接に関係していることにも意識をおきながら、読み進めてもらいたいと思います。

Contents

I	振動	5
1	振動	6
1.1	調和振動子	6
1.2	数学的準備 1 (フーリエ解析 1: フーリエ級数)	7
1.3	数学的準備 2 (フーリエ解析 2: 規格直交関数系)	9
1.4	数学的準備 3 (フーリエ解析 3: 複素フーリエ級数)	10
1.5	数学的準備 4 (フーリエ解析 4: フーリエ積分とフーリエ変換)	12
1.6	振動のフーリエ解析	14
2	例 1 (減衰振動と強制振動)	17
2.1	減衰振動	17
2.2	強制振動	20
2.3	抵抗力のある場合の強制振動	22
3	例 2 (連成振動)	25
3.1	2 粒子系の連成振動	25
II	波動	31
4	波動	32
4.1	波動の本質	32
4.2	波動の要素	32
4.3	横波と縦波	34
4.4	平面波と球面波	34
4.5	ドップラー効果	35

5	波動方程式	40
5.1	正弦波	40
5.2	1次元一般波動	43
5.3	1次元波動方程式	44
5.4	3次元一般平面波	48
5.5	3次元波動方程式	50
6	干渉と回折	56
6.1	重ね合わせの原理	56
6.2	定常波	58
6.3	干渉	60
6.4	回折	64
6.5	波束	64
6.6	波動のフーリエ解析	65
7	反射・透過・屈折	70
7.1	1次元波動の反射と透過	70
7.2	3次元波動の反射と屈折	75
7.3	ホイヘンスの原理	77

Part I

振動

Chapter 1

振動

1.1 調和振動子

様々な振動の中で、最も基本となる振動は調和振動子の振動です。詳細については、Report “力学” の “例（調和振動子）” の Chapter を参照して下さい。ここでは簡単に復習しておきます。1次元調和振動子の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -m\omega^2 x(t)$$

です。ここで、 $m[\text{kg}]$ は質量、 $\omega[\text{rad/s}]$ は角振動数です。そして、この微分方程式の解は、

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta_0)$$

でした。ただし、 $A[\text{m}]$ は振幅、 $\theta_0[\text{rad}]$ は初期位相です。振動する物体の場合、 $x(t)[\text{m}]$ は変位ですが、振動するものは物体に限らず、電場や磁場のようなものもあります。そこで、変位 $x(t)[\text{m}]$ の代わりに、 $\psi(t)$ として、全ての振動を含めた量を使うことにします。 $\psi(t)$ のことを、振動一般量と呼ぶことにします。

最も簡単な振動は調和振動子の振動であり、その時間依存のグラフは正弦曲線になります。それに対して、複雑な振動では時間依存のグラフが綺麗な正弦曲線にはなりません。しかし、どのような振動も正弦関数と余弦関数の重ね合わせにより表されることが、証明されています。つまり、複雑な振動でも複数の調和振動子の振動に分解することができるのです。この強力な数学をフーリエ解析といいます。以下、4つの Section にわたり、フーリエ解析一般について、その数学的エッセンスを見ていき、最後の Section で、フーリエ解析を用いて、複雑な振動を一般的に取り扱うことにしましょう。

1.2 数学的準備 1 (フーリエ解析 1: フーリエ級数)

これから4つのSectionでは、物理から離れて、フーリエ解析という数学の話をしていきます。さて、変数 x の関数 $f(x)$ が周期 $2L$ をもつものとします。(図を見て下さい。また、この場合の変数や周期は、純粋に数学的な量です。) すなわち、 $f(x)$ は、

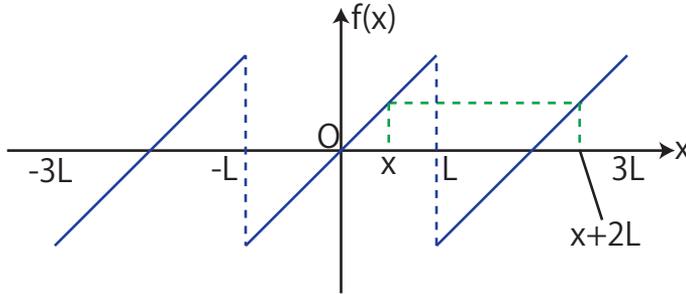


Figure 1.1: 周期関数の例

$$f(x + 2L) = f(x)$$

の関係を満たす関数であるとして、(非周期的な関数の場合は、 $2L \rightarrow \infty$ とすればよいので、以下の議論は一般性をもっていません。) このとき、 $f(x)$ は、周期 $2L$ をもつ正弦関数と余弦関数の集まりの和によって、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots$$

すなわち、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1.1)$$

と展開できるとして、 $f(x)$ から係数 a_n, b_n を決める公式を導いてみましょう。

準備として、次の公式を証明する必要があります。

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = L\delta_{nm} \quad (n, m = 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = L\delta_{nm} \quad (n, m = 1, 2, \dots) \quad (1.3)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \quad (n, m = 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

ここで、第1式と第2式の右辺の記号は、

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

を意味し、クロネッカーのデルタといいます。さて、オイラーの公式、

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

より、

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

としておきます。このとき、(1.2) 式を、以下証明していきます。

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{4} \int_{-L}^L \{\exp(i \frac{n\pi x}{L}) + \exp(-i \frac{n\pi x}{L})\} \{\exp(i \frac{m\pi x}{L}) + \exp(-i \frac{m\pi x}{L})\} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-L}^L \left\{ \exp \frac{i(n+m)\pi x}{L} + \exp \frac{i(n-m)\pi x}{L} + \exp \frac{i(m-n)\pi x}{L} + \exp \frac{-i(n+m)\pi x}{L} \right\} dx \end{aligned}$$

ここで、 k を整数として、

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \exp(i \frac{k\pi x}{L}) dx &= \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx + i \int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx \\ &= \begin{cases} \int_{-L}^L 1 dx + i \int_{-L}^L 0 dx = [x]_{-L}^L = 2L & (k=0) \\ [\frac{L}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{L}]_{-L}^L + i [-\frac{L}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{L}]_{-L}^L = 0 & (k \neq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

なので、

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} \frac{1}{4}(0 + 2L + 2L + 0) = L & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

となり、(1.2) 式が証明されました。(1.3) 式、(1.4) 式も同様に証明されます。

(1.2) 式、(1.3) 式、(1.4) 式を用いて、(1.1) 式の係数 a_n, b_n を求めましょう。まず、 a_n について見ていきます。(1.1) 式の両辺に、 $\cos \frac{m\pi x}{L}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) をかけて、 x について、 $-L$ から L まで積分します。

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx\}$$

ここで、右辺第 1 項の積分は、 $m \neq 0$ のとき、

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx = [\frac{L}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{L}]_{-L}^L = 0$$

となり、 $m = 0$ のとき、

$$\int_{-L}^L \cos \frac{0\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L 1 dx = [x]_{-L}^L = 2L$$

となります。故に、

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} 2L\delta_{0m} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n L\delta_{nm} + b_n \times 0) \\ &= a_0 L\delta_{0m} + a_m L\end{aligned}$$

ですから、すなわち、

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L (m = 0, 1, 2, \dots)$$

となります。 m を n に置き換えて、係数 a_n は、

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.5)$$

と求められます。係数 b_n についても同様に、

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx (n = 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

と求められます。

(1.5) 式と (1.6) 式の係数をフーリエ係数といい、これらの係数を代入して得られる級数 (1.1) 式、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

を、 $f(x)$ に対するフーリエ級数といいます。フーリエ級数によって、周期的な関数を、正弦関数と余弦関数の無限級数によって表すことができるのです。

1.3 数学的準備 2 (フーリエ解析 2: 規格直交関数系)

前 Section で導出した公式 (1.2) 式, (1.3) 式, (1.4) 式,

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= L\delta_{nm} (n, m = 1, 2, \dots) \\ \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= L\delta_{nm} (n, m = 1, 2, \dots) \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= 0 (n, m = 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

を系統立てて調べてみましょう. $\cos \frac{n\pi x}{L}$ には $n=0$ の場合も含まれることを考慮に入れると, (1.2) 式, (1.3) 式, (1.4) 式は, 次のように書き換えることができます.

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \left(\frac{1}{\sqrt{2L}}\right)^2 dx &= 1 \\ \int_{-L}^L \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \delta_{nm} \\ \int_{-L}^L \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \delta_{nm} \\ \int_{-L}^L \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{m\pi x}{L}\right) dx &= 0\end{aligned}$$

これらの式からわかることは, 3 角関数の関数列,

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{\pi}{L}x, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{\pi}{L}x, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{2\pi}{L}x, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{2\pi}{L}x, \dots, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi}{L}x, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi}{L}x, \dots$$

をつくってみると, どの 1 つの関数でも同じものを 2 乗して $-L$ から L まで積分すれば 1 となり, どの異なる 2 つの関数をとっても, その積の, $-L$ から L までの積分は 0 になることがわかります. このような関数列は, 区間 $-L < x < L$ において規格直交関数系をつくるといいます.

一般化した形で述べると, 区間 $a < x < b$ において, 実数値をとる関数列 $\{\phi_n(x)\}$ が,

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx = \delta_{nm}$$

の関係を満たすとき, 関数列 $\{\phi_n(x)\}$ はその区間において規格直交関数系をつくるといいます.

1.4 数学的準備 3 (フーリエ解析 3: 複素フーリエ級数)

フーリエ級数を使って解析を行う場合, 3 角関数よりも複素数の指数関数を使った方が便利な場合もあります. オイラーの公式より, 前述したように,

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\end{aligned}$$

という関係があります. これをフーリエ級数 (1.1) 式,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

に代入して,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \frac{\exp(i\frac{n\pi x}{L}) + \exp(-i\frac{n\pi x}{L})}{2} + b_n \frac{\exp(i\frac{n\pi x}{L}) - \exp(-i\frac{n\pi x}{L})}{2i} \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \exp(i\frac{n\pi x}{L}) + \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \exp(-i\frac{n\pi x}{L}) \right\} \end{aligned}$$

となります. ここで,

$$\begin{aligned} c_0 &\equiv \frac{a_0}{2} \\ c_n &\equiv \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ c_{-n} &\equiv \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

とおくと,

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ c_n \exp(i\frac{n\pi x}{L}) + c_{-n} \exp(i\frac{(-n)\pi x}{L}) \}$$

すなわち,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\frac{n\pi x}{L}) \quad (1.7)$$

となります. この (1.7) 式を複素フーリエ級数といいます. 係数 c_n, c_{-n} を求めると, (1.5) 式, (1.6) 式より,

$$\begin{aligned} c_n &\equiv \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx - i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \sin \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp(-i\frac{n\pi x}{L}) dx \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

および,

$$\begin{aligned} c_{-n} &\equiv \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} + i \sin \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp(i\frac{n\pi x}{L}) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp(-i\frac{(-n)\pi x}{L}) dx \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

となります。また、

$$\begin{aligned} c_0 &\equiv \frac{a_0}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{0\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp(-i \frac{0\pi x}{L}) dx \end{aligned}$$

です。これらをまとめて、

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp(-i \frac{n\pi x}{L}) dx \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (1.8)$$

となります。この (1.8) 式を複素フーリエ係数といいます。

1.5 数学的準備 4 (フーリエ解析 4: フーリエ積分とフーリエ変換)

周期 $2L \rightarrow \infty$ として、非周期関数を取り扱うようにしましょう。このとき、フーリエ級数はフーリエ積分というものになります。以下に、議論していきます。

周期 $2L$ をもつ周期関数 $f(x)$ が複素フーリエ級数によって表されているものとします。複素フーリエ級数 (1.7) 式と複素フーリエ係数 (1.8) 式を再掲すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i \frac{n\pi x}{L}) \\ c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) \exp(-i \frac{n\pi \xi}{L}) d\xi \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

でした。ただし、複素フーリエ係数 (1.8) 式の変数は、複素フーリエ級数 (1.7) 式の変数 x と区別するため ξ と置き直してあります。(1.8) 式を (1.7) 式に代入して、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) \exp(-i \frac{n\pi \xi}{L}) d\xi \exp(i \frac{n\pi x}{L})$$

となります。ここで、

$$k_n \equiv \frac{n\pi}{L}$$

として、新しい記号を導入します。

$$\Delta k = k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{L}$$

ですから、このとき、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k \int_{-L}^L f(\xi) e^{-ik_n \xi} d\xi e^{ik_n x}$$

となります。ここで、 $L \rightarrow \infty$ として非周期関数の場合を考えることにします。このとき、 k_n は連続変数とみなせ、 $\Delta k \rightarrow 0$ ですので、和を積分に変えます。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k \cdot F(k_n) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot F(k)$$

故に、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-ik\xi} e^{ikx}$$

つまり、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{ik(x-\xi)} \quad (1.9)$$

となります。(1.9) 式を複素フーリエ積分といいます。

ここで、(1.9) 式において、

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot f(\xi) e^{-ik\xi} \quad (1.10)$$

とおけば、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot g(k) e^{ikx} \quad (1.11)$$

となります。このとき、(1.10) 式の変換、すなわち、 $f(\xi)$ から $g(k)$ への変換をフーリエ変換といい、(1.11) 式の変換、すなわち、 $g(k)$ から $f(x)$ への変換を逆フーリエ変換といいます。フーリエ変換(1.10) 式は、関数 $f(\xi)$ を k についての重みの分布 $g(k)$ に分解しています。フーリエ変換(1.10) 式は、フーリエ級数の場合のフーリエ係数に相当するものです。フーリエ逆変換(1.11) 式は、 k についての重み $g(k)$ から、関数 $f(x)$ に戻したものです。 $g(k)$ と $f(x)$ の積の積分の前の係数は、 $\frac{1}{2\pi}$ となればよいので、式の形を $g(k)$ と $f(x)$ について均等にするために、

$$\begin{aligned} \tilde{g}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \\ \tilde{f}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k) e^{ikx} dk \end{aligned}$$

としてもよいことがわかります。これらの式の関数の上にあるチルダの記号は、(1.10) 式と(1.11) 式から区別するために付けましたが、改めてチルダを取って表記することにします。また、この段階で ξ を x に戻しても、混乱はしないでしょう。最終的に、フーリエ変換は、

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (1.12)$$

となり、フーリエ逆変換は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \quad (1.13)$$

となります。

フーリエ変換とフーリエ逆変換を3次元に拡張することもできます。このとき、1次元の変数 x を、3次元の変数 $\vec{x} = (x, y, z)$ にします。同様に、1次元の変数 k を、3次元の変数 $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ にします。1次元フーリエ変換 (1.12) 式より、

$$\begin{aligned} g(k_x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik_x x} dx \\ g(k_y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ik_y y} dy \\ g(k_z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-ik_z z} dz \end{aligned}$$

が成立します。これらの式を辺々掛け合わせます。

$$g(k_x)g(k_y)g(k_z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz f(x)f(y)f(z) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}$$

ここで、 $g(k_x)g(k_y)g(k_z)$ を $g(\vec{k})$ と、 $f(x)f(y)f(z)$ を $f(\vec{x})$ と、改めてそれぞれ置き直します。このとき、次式の3次元フーリエ変換が成立します。

$$g(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} dx dy dz \quad (1.14)$$

また、1次元フーリエ逆変換 (1.13) 式より、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k_x) e^{ik_x x} dk_x \\ f(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k_y) e^{ik_y y} dk_y \\ f(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k_z) e^{ik_z z} dk_z \end{aligned}$$

が成立します。これらの式を辺々掛け合わせます。

$$f(x)f(y)f(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z g(k_x)g(k_y)g(k_z) e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z}$$

このとき、次式の3次元フーリエ逆変換が成立します。

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} dk_x dk_y dk_z \quad (1.15)$$

以上のような数学をフーリエ解析といいます。フーリエ解析は振動と波動の分野だけでなく、量子力学等、物理学の研究において、幅広く使用されています。

1.6 振動のフーリエ解析

振動に話を戻して、周期 $T[s]$ の一般的な振動の振動一般量を表す関数 $\psi(t)$ を、今までの数学的準備で取り扱った $f(x)$ と同定し、フーリエ級数で表現することを考えてみましょう。

(1.1) 式において、数学的な周期 $2L$ を振動の時間の周期 $T[s]$ に、数学的な変数 x を振動における変数である時間 $t[s]$ に置き換えます。このとき、

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{T/2} + b_n \sin \frac{n\pi t}{T/2} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t \right) \\ \therefore \psi(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)\end{aligned}$$

とすることができます。ただし、

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

は振動の角振動数です。任意の振動が、

$$\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$$

の角振動数をもつ調和振動子の和によって表されるのです。それぞれの角振動数についての重みであるフーリエ係数は、(1.5) 式と (1.6) 式より、

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t) \cos \frac{n\pi t}{T/2} dt \\ \therefore a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t) \cos n\omega t \cdot dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t) \sin \frac{n\pi t}{T/2} dt \\ \therefore b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t) \sin n\omega t \cdot dt \quad (n = 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

によって求められます。最初の Section で述べていたこと、すなわち、任意の振動が無限個の調和振動子の振動の和に分解できることが確認されました。

周期 $T[s]$ の一般的な振動の振動一般量を表す関数 $\psi(t)$ を数学的準備で取り扱った関数 $f(x)$ と同定し、複素フーリエ級数で表現することを考えてみましょう。(1.7) 式において、数学的周期 $2L$ を振動の時間的周期 $T[s]$ に、数学的変数 x を振動における変数である時間 $t[s]$ に置き換えます。このとき、

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i \frac{n\pi t}{T/2}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(in \frac{2\pi}{T} t\right) \\ \therefore \psi(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}\end{aligned}$$

とすることができます。ただし、

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

は振動の角振動数です。任意の振動が、

$$\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$$

の角振動数をもつ調和振動子の和によって表されるのです。それぞれの角振動数についての重みであるフーリエ係数は、(1.8)式より、

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t) \exp(-i \frac{n\pi t}{T/2}) dt$$

$$\therefore c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t) e^{-in\omega t} dt \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

です。複素フーリエ級数を用いても、任意の振動が無数個の調和振動子の振動の和に分解できることが確認されました。

一般的な振動についてのフーリエ変換も考えてみましょう。前述の数学的準備におけるフーリエ変換とフーリエ逆変換を表す式は、(1.12)式と(1.13)式、

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

でした。物理的な振動の場合、振動一般量 $\psi(t)$ を数学的関数 $f(x)$ と同定しましょう。さらに、(1.12)式、(1.13)式に出てくる k は、振動の場合、分解された調和振動子のそれぞれの角振動数 $\omega[\text{rad/s}]$ という意味をもってきます。そして、数学的変数 x を振動における変数である時間 $t[\text{s}]$ に置き換えます。このとき、フーリエ変換(1.12)式は、次のようになります。

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt$$

すなわち、振動の一般量 $\psi(t)$ を角振動数 $\omega[\text{rad/s}]$ の重みの分布 $g(\omega)$ で表しています。一方、フーリエ逆変換(1.13)式は、

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

となります。この式は、分解されたそれぞれの調和振動子の振動 $e^{i\omega t}$ に角振動数 $\omega[\text{rad/s}]$ のときの重み $g(\omega)$ をかけて重ね合わせて、振動一般量 $\psi(t)$ に戻したものです。

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 2

例 1（減衰振動と強制振動）

2.1 減衰振動

振動という現象の最も基本となる 1 次元調和振動子の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -m\omega^2 x(t)$$

でした。右辺の力は復元力です。ここで、速さに比例する抵抗力が働く場合を考えます。便宜上、比例定数は $2mk$ とおきます。このとき、振動はだんだん減衰していき、最後には止まることになります。このような振動を、減衰振動といいます。運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -m\omega^2 x(t) - 2mk \frac{dx(t)}{dt}$$

すなわち、

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2k \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0 \quad (2.1)$$

となります。(2.1) 式の微分方程式の解法として、複素数を使った方法を採用します。複素数の微分方程式を解き、その解の実数部がもとの方程式の解になります。すなわち、

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + 2k \frac{dz(t)}{dt} + \omega^2 z(t) = 0 \quad (z(t) = x(t) + iy(t)) \quad (2.2)$$

という (2.1) 式と同形の複素数 $z(t)$ についての微分方程式 (2.2) 式を解き、その解の実数部がもとの (2.1) 式の解になります。ただし、 $x(t)$ と $y(t)$ は実数で、 $x(t)$ が実数部、 $y(t)$ が虚数部です。ここで、

$$z(t) = \alpha e^{lt}$$

とおいてみます。このとき、 α も λ も複素数です。(2.2) 式は次のように変形されます。

$$\begin{aligned}\lambda^2 \alpha e^{\lambda t} + 2k\lambda \alpha e^{\lambda t} + \omega^2 \alpha e^{\lambda t} &= 0 \\ \therefore \lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 &= 0\end{aligned}$$

したがって、

$$\lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2} \quad (2.3)$$

となります。(2.3) 式について、3つの場合を考え、解を求めます。

まず、

$$k^2 - \omega^2 < 0$$

の場合を考えます。つまり、復元力に対して抵抗力が比較的小さい場合です。このとき、

$$\omega'^2 \equiv \omega^2 - k^2$$

とおくと、(2.3) 式は、

$$\lambda = -k \pm i\omega'$$

となります。したがって、

$$\begin{aligned}z(t) &= \alpha_1 e^{-kt} e^{i\omega' t} + \alpha_2 e^{-kt} e^{-i\omega' t} \\ &= (a_1 + ib_1) e^{-kt} (\cos \omega' t + i \sin \omega' t) + (a_2 + ib_2) e^{-kt} (\cos \omega' t - i \sin \omega' t) \\ &= \{(-b_1 + b_2) e^{-kt} \sin \omega' t + (a_1 + a_2) e^{-kt} \cos \omega' t\} + i\{(a_1 - a_2) e^{-kt} \sin \omega' t + (b_1 + b_2) e^{-kt} \cos \omega' t\}\end{aligned}$$

となります。ただし、 a_1, b_1, a_2, b_2 は実数です。 $z(t)$ の実数部をとって、(2.1) 式の解は、($A_1 \equiv -b_1 + b_2, A_2 \equiv a_1 + a_2$ において、)

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{-kt} \sin \omega' t + A_2 e^{-kt} \cos \omega' t \\ &= A e^{-kt} (a \sin \omega' t + b \cos \omega' t)\end{aligned}$$

です。ただし、 A, a, b は実定数です。さらに変形して、

$$x(t) = A e^{-kt} A' \sin(\omega' t + \theta_0)$$

となります。ただし、

$$\begin{aligned}A' &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan \theta_0 &= \frac{b}{a}\end{aligned}$$

です。よって、 B を実定数として、解は、

$$x(t) = B e^{-kt} \sin(\omega' t + \theta_0)$$

となります。振動しながら指数関数的に減衰することがわかります。

次に、

$$k^2 - \omega^2 > 0$$

の場合を考えます。つまり、復元力に対して抵抗力が比較的大きい場合です。このとき、

$$\lambda_1 = k - \sqrt{k^2 - \omega^2}$$

$$\lambda_2 = k + \sqrt{k^2 - \omega^2}$$

とおくと、複素数の解は、

$$z(t) = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t}$$

です。複素数 A_1, A_2 の実数部を B_1, B_2 とおいて、

$$x(t) = B_1 e^{-\lambda_1 t} + B_2 e^{-\lambda_2 t}$$

が解になります。どちらの項も振動せずに指数関数的に減衰しますが、これを過減衰の状態といいます。

最後に、

$$k^2 - \omega^2 = 0$$

の場合を考えます。このとき、解は、

$$z(t) = \alpha e^{-kt}$$

ですが、2階の線形微分方程式を取り扱っているのに、このままでは一般解にはできません。そこで、

$$z(t) = \alpha(t)e^{-kt}$$

とおいて、(2.2) 式に代入して計算します。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{d\alpha(t)}{dt} e^{-kt} - k\alpha(t)e^{-kt} \\ \frac{d^2z(t)}{dt^2} &= \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} e^{-kt} - 2k \frac{d\alpha(t)}{dt} e^{-kt} + k^2\alpha(t)e^{-kt} \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} - 2k \frac{d\alpha(t)}{dt} + k^2\alpha(t) \right) e^{-kt} + 2k \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} - k\alpha(t) \right) e^{-kt} + \omega^2\alpha(t)e^{-kt} = 0 \\ \therefore & \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} - (k^2 - \omega^2)\alpha(t) = 0 \\ \therefore & \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} = 0 \\ \therefore & \alpha(t) = Ct + D \end{aligned}$$

となります。ただし、 C と D は積分定数です。したがって、(2.2) 式の一般解は、

$$z(t) = (Ct + D)e^{-kt}$$

となります。定数 C と D の実数部を、改めて C と D とおくと、(2.1) 式の解は、

$$x(t) = (Ct + D)e^{-kt}$$

です。この場合も指数関数的に減衰します。この状態を臨界減衰といいます。

2.2 強制振動

角振動数 $\omega_0[\text{rad/s}]$ の 1 次元調和振動子に角振動数 $\omega[\text{rad/s}]$ の周期的な外力、

$$F \cos \omega t$$

が働く場合を考えましょう。このような状況の振動を強制振動といいます。運動方程式は次のようになります。

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -m\omega_0^2 x(t) + F \cos \omega t$$

少し変形して、次のようになります。

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \frac{F}{m} \cos \omega t \quad (2.4)$$

(2.4) 式は 2 階の線形微分方程式です。これを線形微分方程式の一般論にしたがって解きます。まず、右辺を 0 とおいた同次方程式は、調和振動子の微分方程式そのものですので、その解は、

$$x_0(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

です。次に、(2.4) 式の特解を求めます。特解としては外力と同じ周期の振動が予想されるので、

$$x_1(t) = b \cos \omega t$$

とおいて、(2.4) 式に代入して計算します。

$$\begin{aligned} -b\omega^2 \cos \omega t + \omega_0^2 b \cos \omega t &= \frac{F}{m} \cos \omega t \\ \therefore b(\omega_0^2 - \omega^2) &= \frac{F}{m} \\ \therefore b &= \frac{F}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \therefore x_1(t) &= \frac{F}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \end{aligned}$$

故に、一般解は同次方程式の解と特解の和なので、

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta_0) + \frac{F}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

と求められます。この解の第 1 項は、外力が作用していないときの調和振動を表しています。第 2 項は外力の影響を示していますが、

$$\omega = \omega_0$$

の場合、振幅は無限大になります。このような状態を共鳴または共振といいます。

強制振動の問題を、複素数を使った方法で解いてみましょう。周期的な外力として、

$$F e^{i\omega t}$$

を加え、複素数の微分方程式を考えます。

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -m\omega_0^2 z(t) + F e^{i\omega t}$$

変形して、

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \omega_0^2 z(t) = \frac{F}{m} e^{i\omega t} \quad (2.5)$$

z の実数部が解なので、実質的には外力として、

$$F \cos \omega t$$

を加えていることになります。この外力は上の議論におけるものと一致しています。(2.5) 式の特解を求めるために、 α を複素数の定数として、

$$z(t) = \alpha e^{i\omega t}$$

とおき、微分方程式に代入して計算します。

$$\begin{aligned} (-\omega^2)\alpha e^{i\omega t} + \omega_0^2 \alpha e^{i\omega t} &= \frac{F}{m} e^{i\omega t} \\ \therefore \alpha(\omega_0^2 - \omega^2) &= \frac{F}{m} \\ \therefore \alpha &= \frac{F}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

α が求められましたが、これは実数であることがわかりました。故に、 $z(t)$ は、

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{F}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega t} \\ &= \frac{F}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \end{aligned}$$

ですので、実数部をとって特解 $x_1(t)[m]$ は、

$$x_1(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

となります。この特解は上の議論での余弦関数のものに一致しています。

2.3 抵抗力のある場合の強制振動

“減衰振動”の Section のように、速さに比例する抵抗力を受けると同時に、“強制振動”の Section のような外力が働く場合を考えましょう。このとき、運動方程式は次のようになります。

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -m\omega_0^2 x(t) - 2mk \frac{dx(t)}{dt} + F \cos \omega t$$

これを変形して、

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2k \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \frac{F}{m} \cos \omega t \quad (2.6)$$

となります。(2.6) 式を線形微分方程式の一般論にしたがって解きます。まず、右辺を 0 とおいた同次方程式については、“減衰振動”の Section で取り扱った通りです。次に、(2.6) 式の特解を求めます。解としては、外力と同じ周期の振動が予想されるので、特解を、

$$x_1(t) = A \cos(\omega t - \delta)$$

とおいて、(2.6) 式に代入して計算します。

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \cos(\omega t - \delta) - 2kA\omega \sin(\omega t - \delta) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \delta) &= \frac{F}{m} \cos \omega t \\ \therefore (\omega_0^2 - \omega^2)A \cos(\omega t - \delta) - 2\omega kA \sin(\omega t - \delta) &= \frac{F}{m} \cos \omega t \\ \therefore (\omega_0^2 - \omega^2)A(\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta) - 2\omega kA(\sin \omega t \cos \delta - \cos \omega t \sin \delta) &= \frac{F}{m} \cos \omega t \end{aligned}$$

故に、

$$\{(\omega_0^2 - \omega^2)A \cos \delta + 2\omega kA \sin \delta\} \cos \omega t + \{(\omega_0^2 - \omega^2)A \sin \delta - 2\omega kA \cos \delta\} \sin \omega t = \frac{F}{m} \cos \omega t \quad (2.7)$$

(2.7) 式において、 $t = 0[s]$ とおいた式と、(2.7) 式を $t[s]$ で微分して $t = 0[s]$ とおいた式より、

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A \cos \delta + 2\omega kA \sin \delta = \frac{F}{m} \quad (2.8)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A \sin \delta - 2\omega kA \cos \delta = 0 \quad (2.9)$$

です。ここで、(2.8) \times $2\omega k$ + (2.9) \times $(\omega_0^2 - \omega^2)$ より、

$$\begin{aligned} 4\omega^2 k^2 A \sin \delta + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 A \sin \delta &= 2\omega k \frac{F}{m} \\ \therefore A \sin \delta &= \frac{2\omega k}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 k^2} \frac{F}{m} \end{aligned}$$

となります。また、(2.8) \times $(\omega_0^2 - \omega^2)$ - (2.9) \times $2\omega k$ より、

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 A \cos \delta + 4\omega^2 k^2 A \cos \delta &= (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{F}{m} \\ \therefore A \cos \delta &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 k^2} \frac{F}{m} \end{aligned}$$

となります。故に、 $A[m]$ が以下のように求められます。

$$\begin{aligned} A^2 \cos^2 \delta + A^2 \sin^2 \delta &= \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 k^2}{\{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 k^2\}^2} \left(\frac{F}{m}\right)^2 \\ \therefore A^2 &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 k^2} \left(\frac{F}{m}\right)^2 \\ \therefore A &= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 k^2}} \frac{F}{m} \end{aligned}$$

$\delta[\text{rad}]$ も次のように計算できます。

$$\begin{aligned} \frac{A \sin \delta}{A \cos \delta} &= \frac{\frac{2\omega k}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 k^2} \frac{F}{m}}{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 k^2} \frac{F}{m}} \\ \therefore \tan \delta &= \frac{2\omega k}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

特解を求めるのに、複素数を使った方法で解いてみましょう。微分方程式、

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -m\omega_0^2 z(t) - 2mk \frac{dz(t)}{dt} + F e^{i\omega t}$$

を変形して、

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + 2k \frac{dz(t)}{dt} + \omega_0^2 z(t) = \frac{F}{m} e^{i\omega t} \quad (2.10)$$

の実数部が求める特解になります。 α を複素数の定数として、

$$z(t) = \alpha e^{i\omega t}$$

とおき、微分方程式 (2.10) 式に代入して計算します。

$$\begin{aligned} (-\omega^2)\alpha e^{i\omega t} + 2k \cdot i\omega\alpha e^{i\omega t} + \omega_0^2\alpha e^{i\omega t} &= \frac{F}{m} e^{i\omega t} \\ \therefore \alpha(-\omega^2 + 2i\omega k + \omega_0^2) &= \frac{F}{m} \\ \therefore \alpha &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\omega k} \frac{F}{m} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \beta &\equiv (\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\omega k \\ \tan \delta &= \frac{2\omega k}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

とおきます。このとき、

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\beta} \frac{F}{m} \\ \therefore \alpha &= \frac{1}{|\beta| e^{i\delta}} \frac{F}{m} \end{aligned}$$

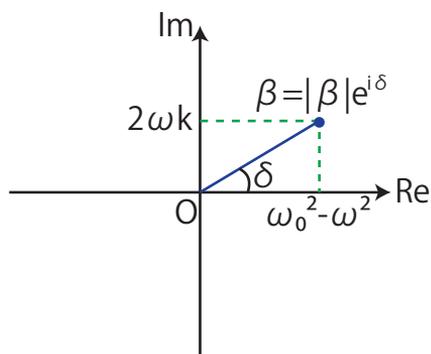


Figure 2.1: ガウス平面

です。さらに,

$$A \equiv \frac{1}{|\beta|} \frac{F}{m}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \alpha &= A e^{-i\delta} \\ \therefore z(t) &= \alpha e^{i\omega t} = A e^{-i\delta} e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t - \delta)} \end{aligned}$$

となります。実数部をとって、特解 $x_1(t)[m]$ は,

$$x_1(t) = A \cos(\omega t - \delta)$$

となります。この特解は、上の議論での余弦関数のものに一致しています。

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 3

例 2 (連成振動)

3.1 2 粒子系の連成振動

これまでの Chapter で取り扱ってきた振動は 1 物体に関するものでした。ここでは 3 本のばねで繋いだ 2 粒子の運動を取り扱ってみます。このような系の運動を 2 粒子系の連成振動といいます。図の (a) は、つりあいの状態です。このとき、ばねは 3 本とも自然長である

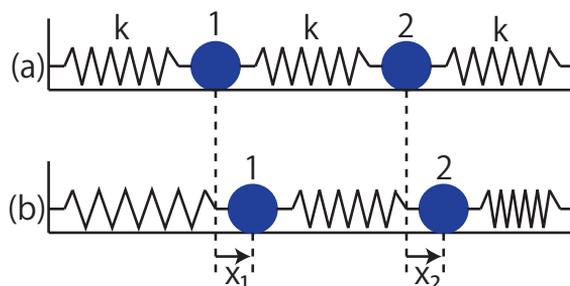


Figure 3.1: 連成振動

るとします。床に摩擦はなく、粒子は質点とみなすことができ、質量は 2 つとも $m[\text{kg}]$ とします。また、ばねの質量は無視でき、ばね定数は 3 本とも $k[\text{N/m}]$ です。図の (b) は、2 粒子がつりあいの位置からずれた状態ですが、その変位はそれぞれ $x_1(t)[\text{m}]$, $x_2(t)[\text{m}]$ です。以上の状況において、図の (b) の 2 物体に対して運動方程式を立てると、それぞれ次のようになります。ただし、右向きを正とします。

$$m \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = -kx_1(t) + k(x_2(t) - x_1(t))$$
$$m \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = -kx_2(t) - k(x_2(t) - x_1(t))$$

右辺を計算して,

$$m \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = -2kx_1(t) + kx_2(t) \quad (3.1)$$

$$m \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = kx_1(t) - 2kx_2(t) \quad (3.2)$$

です. これは連立 2 階微分方程式であり, 次のように解きます. (3.1) 式+(3.2) 式と (3.1) 式-(3.2) 式より,

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x_1(t) + x_2(t)) = -k(x_1(t) + x_2(t))$$

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x_1(t) - x_2(t)) = -3k(x_1(t) - x_2(t))$$

が得られます. ここで,

$$q_1(t) \equiv x_1(t) + x_2(t)$$

$$q_2(t) \equiv x_1(t) - x_2(t)$$

と,

$$\omega_1^2 \equiv \frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 \equiv \frac{3k}{m}$$

とおくと, 方程式は,

$$\frac{d^2 q_1(t)}{dt^2} = -\omega_1^2 q_1(t)$$

$$\frac{d^2 q_2(t)}{dt^2} = -\omega_2^2 q_2(t)$$

となります. このようにすると, 座標 $q_1(t)[m], q_2(t)[m]$ についての調和振動子の微分方程式なので, 解はわかっています. 調和振動子に帰着させるため新しく選んだ座標を基準座標といいます. このとき,

$$q_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1)$$

$$q_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)$$

です. ただし, $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ は定数です. $x_1(t)[m], x_2(t)[m]$ は,

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(q_1(t) + q_2(t))$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}(q_1(t) - q_2(t))$$

により求められます。

連立 2 階線形微分方程式 (3.1) 式と (3.2) 式を，行列を使った方法で解いてみましょう。まず，微分方程式を，

$$\begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

と表します。ここで，

$$x_i(t) = A_i e^{i(\omega t + \theta_i)} \quad (i = 1, 2)$$

とおきます。(複素数を使っていますが，後で実数部をとります。) このような振動を基準振動といいます。このとき，上の行列の方程式は，

$$\begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

したがって，

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

となります。(3.3) 式の中の各行列を文字で表し，

$$\bar{B} \cdot \bar{X}(t) = \omega^2 \bar{X}(t) \quad (3.4)$$

としておきます。ここで，文字の上の記号バーは，それが行列であることを表しています。

(3.3) 式より，

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

となります。(3.3) 式，すなわち (3.4) 式は固有値方程式です。(3.5) 式で， $x_1(t)[m]$, $x_2(t)[m]$ が 0 でない解をもつためには，左辺の 2×2 の行列が逆行列をもたないことが必要十分条件です。したがって， 2×2 の行列の行列式が 0 になります。すなわち，

$$\begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

です. これを計算すると,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(-\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \\ \therefore \frac{4k^2}{m^2} - \frac{4k}{m}\omega^2 + \omega^4 - \frac{k^2}{m^2} &= 0 \\ \therefore \omega^4 - \frac{4k}{m}\omega^2 + \frac{3k^2}{m^2} &= 0 \\ \therefore \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)\left(\omega^2 - \frac{3k}{m}\right) &= 0 \\ \therefore \omega^2 = \omega_1^2, \omega_2^2 \end{aligned}$$

となります. ただし,

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &\equiv \frac{k}{m} \\ \omega_2^2 &\equiv \frac{3k}{m} \end{aligned}$$

とおきました.

$$\omega^2 = \omega_1^2 \equiv \frac{k}{m}$$

を (3.5) 式に代入すると,

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0$$

すなわち,

$$\begin{aligned} \frac{k}{m}x_1(t) - \frac{k}{m}x_2(t) &= 0 \\ -\frac{k}{m}x_1(t) + \frac{k}{m}x_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

ですから,

$$x_1(t) = x_2(t)$$

となります. 故に, 解は,

$$x_1(t) = x_2(t) = A' e^{i(\omega_1 t + \theta_1)}$$

ですが, 実数部をとって,

$$x_1(t) = x_2(t) = A' \cos(\omega_1 t + \theta_1)$$

とします. また, 対応する固有ベクトルは,

$$\bar{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

です。一方,

$$\omega^2 = \omega_2^2 \equiv \frac{3k}{m}$$

を (3.5) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0 \\ & \therefore -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{k}{m}x_2(t) = 0 \\ & \therefore x_1(t) = -x_2(t) \end{aligned}$$

となります。故に, 解は,

$$x_1(t) = -x_2(t) = A'' e^{i(\omega_2 t + \theta_2)}$$

ですが, 実数部をとって,

$$x_1(t) = -x_2(t) = A'' \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

とします。また, 対応する固有ベクトルは,

$$\bar{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

です。以上, 導出された解は (3.3) 式の特別な解です。一般解にするには, 4 個の任意定数を含まなければなりません。そこで,

$$x_1(t) = A' \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A'' \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (3.6)$$

$$x_2(t) = A' \cos(\omega_1 t + \theta_1) - A'' \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (3.7)$$

をつくってみると, これがもとの微分方程式,

$$\begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

を満たすことは, 次のように確かめられます。まず, 左辺は次のように計算されます。

$$\begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A'' \cos(\omega_2 t + \theta_2) \\ A' \cos(\omega_1 t + \theta_1) - A'' \cos(\omega_2 t + \theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 A' \cos(\omega_1 t + \theta_1) - \omega_2^2 A'' \cos(\omega_2 t + \theta_2) \\ -\omega_1^2 A' \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \omega_2^2 A'' \cos(\omega_2 t + \theta_2) \end{pmatrix}$$

一方, 右辺は次のようになります。

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} A' \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A'' \cos(\omega_2 t + \theta_2) \\ A' \cos(\omega_1 t + \theta_1) - A'' \cos(\omega_2 t + \theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 A' \cos(\omega_1 t + \theta_1) - \omega_2^2 A'' \cos(\omega_2 t + \theta_2) \\ -\omega_1^2 A' \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \omega_2^2 A'' \cos(\omega_2 t + \theta_2) \end{pmatrix}$$

したがって, (3.6) 式と (3.7) 式が連立微分方程式の一般解です.

以上で解が求められたのですが, 行列 \bar{B} を対角化して, 基準座標を導出する手順を見おおくことにします. 2つの固有ベクトルから直交行列 \bar{P} をつくと次のようになります.

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

直交行列を使って, 行列 \bar{B} を対角化します. (3.4) 式,

$$\bar{B} \cdot \bar{X}(t) = \omega^2 \bar{X}(t)$$

より,

$$\begin{aligned} \bar{P}^t \bar{B} \bar{P} \bar{P}^t \bar{X}(t) &= \omega^2 \bar{P}^t \bar{X}(t) \\ \therefore \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \omega^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k}{m} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k}{m} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3k}{m} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1(t) + x_2(t)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1(t) - x_2(t)) \end{pmatrix} &= \omega^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1(t) + x_2(t)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1(t) - x_2(t)) \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & \frac{3k}{m} \end{pmatrix} \bar{Q}(t) &= \omega^2 \bar{Q}(t) \end{aligned}$$

となります. ここで, \bar{P}^t は \bar{P} の転置行列であり,

$$\begin{aligned} \bar{Q}(t) &= \bar{P}^t \bar{X}(t) \\ &= \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1(t) + x_2(t)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1(t) - x_2(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

は基準座標です.

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Part II

波動

Chapter 4

波動

4.1 波動の本質

波動の本質は振動の伝搬にあります。水波を例にとって考えてみましょう。振動を伝える物質を媒質といいます。水波の場合は水が媒質になります。媒質中のある場所に振動が引き起こされるとき、その場所を波源といいます。波源から媒質の各点に振動が隣、また隣へと伝搬して波動は伝わっていきます。池に1枚の葉を浮かべ、石を投げ込んでみます。このとき、同心円状の波動が外向きに発生します。葉は波動が通過したとき、上下には振動しますが、外には移動しません。つまり、媒質は移動せず、振動が伝搬するのです。

波動には媒質が必要です。水波の場合は水が媒質であり、音波の場合は空気が媒質であり、地震波の場合は地殻が媒質です。しかし、電磁波や重力波は何もない真空中を伝わります。これは、真空には場が存在することができ、電磁場や重力場が振動し、その振動が真空中を伝搬することによります。

4.2 波動の要素

ひもを伝わる波動を考えましょう。ひもは曲線状に変形していますが、この曲線の形を波形といいます。そして波形が伝わる速さが波動の伝搬速度 $v[m/s]$ です。

ここで、波源が調和振動をする特別な1次元波動を考えます。この場合、振動が各点に伝搬し、各点が調和振動子の振動をします。そして波形は正弦曲線をなし、その波形が進行していきます。このような波動を正弦波といいます。ある時刻における正弦波の様子を、図“正弦波1”に示します。各点の振動の中心からのずれ $\psi[m]$ を変位といい、図の青色の矢印で示しています。媒質はこの変位の方向に振動しています。ひもの場合、 ψ は変位ですが、波動の種類に

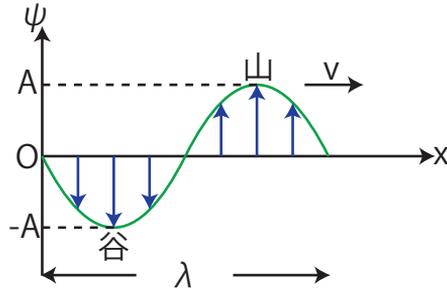


Figure 4.1: 正弦波 1

より ψ は様々な量を表します。(例えば、電磁波の場合は電場と磁束密度が ψ になります。) そこで、 ψ のことを波動一般量ということにします。(この名称は J Simplicity 内だけの呼び方です.)

横軸の $x[m]$ は、媒質の位置を示しています。また、図の $\lambda[m]$ を波長、つりあいの位置から測った山の高さ、すなわち波動一般量の最大値 A を振幅といいます。媒質の各点が 1 振動する時間、すなわち各点の振動の周期を、波動の周期 $T[s]$ といい、 $1[s]$ あたりの媒質の各点の振動の回数を、波動の振動数 $f[Hz]$ (ヘルツ) [$Hz = 1/s$] といいます。波源の周期・振動数は各点の周期・振動数と一致します。伝搬に伴う減衰がない場合は、振幅も一致します。ここで、振動数 $f[Hz]$ は周期 $T[s]$ の逆数です。

$$f = \frac{1}{T}$$

また、

- “媒質のある点 P が 1 振動する時間、周期 $T[s]$ の間に、波動は 1 波長 $\lambda[m]$ 進みます。”

という関係が成立します。この関係は作図により、図“正弦波 2”のように確認されます。したがって、

$$\begin{aligned} v &= \frac{\lambda}{T} \\ &= f\lambda \end{aligned}$$

という関係式が成立します。

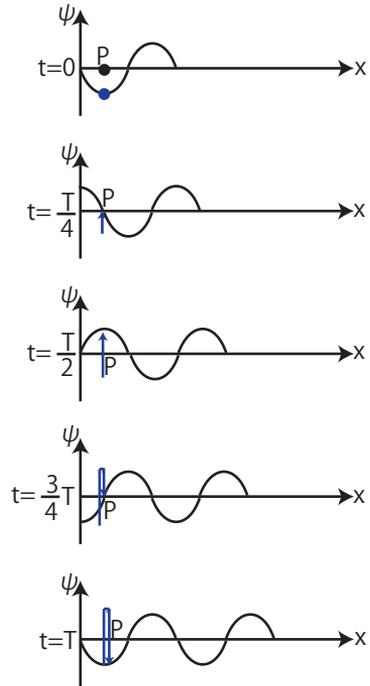


Figure 4.2: 正弦波 2

4.3 横波と縦波

媒質の振動の方向が、波動の伝搬の方向と垂直である波動を横波といいます。前の Section で図示した波動は横波です。横波の代表例は光波（電磁波）です。横波の図はよく使われるので、波動は全て横波であると思われがちですが、別種の波動が存在します。それは、媒質の振動方向が波動の伝搬の方向と平行である波動であり、縦波といいます。縦波の代表例は音波です。水波は各点が円運動する波動であり、横波でも縦波でもないですが、横波に近似することが多いです。縦波は図示してもわかりにくいので、横波に表示し直した方が有用です。下に縦波の各点の幾つの変位と、それをあるルールによって横波に直した図を示しました。あるルールというのは、縦波の右の変位を ψ 軸の正の向きに、縦波の左の変位を ψ 軸の負の向きになおすというものです。図のように、縦波の場合、媒質の密度

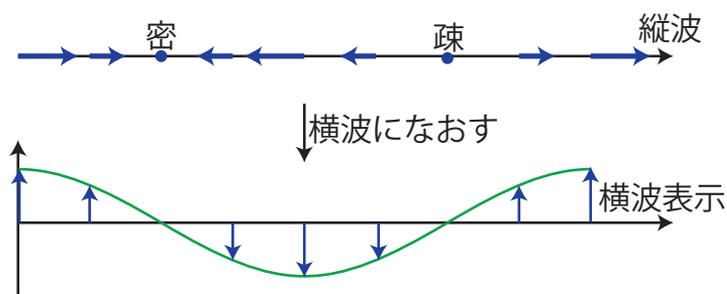


Figure 4.3: 縦波

が密の部分と疎の部分ができます。その密と疎が伝搬するので、縦波のことを疎密波ともいいます。今からの波動に関する議論では、1次元の波動を横波で図示しますが、縦波の場合も含んでいると了解して下さい。縦波の場合も、それを横波表示していると考えer 訳です。

4.4 平面波と球面波

水面波のように、2次元平面を伝搬する波動を考えます。ある時刻の波動を見ると、平面のある場所では媒質の振動状態は山の頂点になり、また、別の場所では谷の底点になっています。山の頂点を連ねた線を山の波面といい、谷の底点を連ねた線を谷の波面といいます。一般に、平面を波動が伝わる時、ある時刻に媒質の振動状態が同じ場所を連ねた線のことを波面といいます。波面が直線であれば平面波、円であれば球面波といいます。

3次元空間を伝わる波動も同様です。ある時刻に媒質の振動状態が同じ場所を連ねた面のことを波面といいます。波面が平面であれば平面波、球面であれば球面波といいます。

4.5 ドップラー効果

ドップラー効果とは、波動を観測する人と波源とが、お互いに近づくとときには振動数を大きく観測し、お互いに遠ざかるとときには振動数を小さく観測する現象です。よく知られているのは音波のドップラー効果です。救急車のサイレンの音が高く聞こえたり、低く聞こえたりすることはよく経験することだと思います。ドップラー効果は音波だけでなく、波動一般に成立する現象です。ドップラー効果は次の幾つかの要素から構成されます。

- 波動の伝播速度: $v[m/s]$
- 波源: $S(\text{Source})$
- 波源の速度: $u_S[m/s]$
- 観測者: $O(\text{Observer})$
- 観測者の速度: $u_O[m/s]$
- 波源の振動数 (元の振動数) : $f_0[\text{Hz}]$
- 観測される振動数 (ドップラー効果が起こった振動数) : $f'[\text{Hz}]$

まず、波源 S が動き、観測者 O が静止している場合を考えましょう。上から見た状況を図に示しました。波源 S が右に等速度 $u_S[m/s]$ で動いています。前方と後方にそれぞれ観測者 O がいます。時刻 $0[s]$ で S_0 から波動を出し、波源 S は時刻 $t[s]$ に S_1 まで来ます。 (S_0S_1) の距離は $u_S t[m]$ です。) その間に出た波動は図のような波面を描きます。つまり、図の波面は時刻 $t[s]$ での同時刻の波面になっています。図を見ると明らかですが、波源 S の前方では波長が短くなり、後方では波長が長くなります。この波長の変化により観測される振動数が変化します。これが、波源 S が動き、観測者 O が静止している場合のドップラー効果が起こる原因です。では、具体的に観測される波長と振動数を表す式を求めてみましょう。波源 S が近づく場合、前方の S_1A_1 間 ($vt - u_S t[m]$) に、 $f_0 t[\text{個}]$ の波動があります。故に、観測される波長 $\lambda'[m]$ は次式で表されます。

$$\lambda' = \frac{vt - u_S t}{f_0 t}$$

すなわち、

$$\lambda' = \frac{v - u_S}{f_0} \quad (4.1)$$

です。確かに、波長は短くなっています。ここで、波源 S が動いていても、媒質 (水波の場合は水、音波の場合は空気。) が動いていないので、伝播速度はやはり $v[m/s]$ であるこ

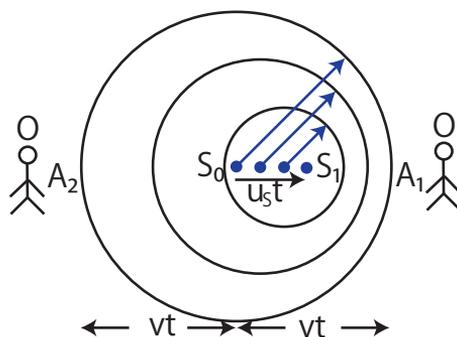


Figure 4.4: ドップラー効果 1

とに注意しましょう。関係式, $v = f\lambda$ より,

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{\lambda'} v \\ &= \frac{f_0}{v - u_S} v \end{aligned}$$

ですから,

$$f' = \frac{v}{v - u_S} f_0 \quad (4.2)$$

となります。したがって、確かに観測される振動数 f' [Hz] は大きくなります。次に、波源 S が遠ざかる場合ですが、後方の $S_1 A_2$ 間 ($= vt + u_S t$ [m]) に、 $f_0 t$ [個] の波動があります。故に、観測される波長 λ' [m] は次式で表されます。

$$\lambda' = \frac{vt + u_S t}{f_0 t}$$

ですから,

$$\lambda' = \frac{v + u_S}{f_0} \quad (4.3)$$

となります。確かに、波長は長くなっています。ここで、波源 S が動いていても、媒質（水波の場合は水、音波の場合は空気。）が動いていないので、伝播速度はやはり v [m/s] であることに注意しましょう。関係式, $v = f\lambda$ より,

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{\lambda'} v \\ &= \frac{f_0}{v + u_S} v \end{aligned}$$

ですから,

$$f' = \frac{v}{v + u_S} f_0 \quad (4.4)$$

となります。したがって、確かに観測される振動数 f' [Hz] は小さくなります。

それでは、観測者 O が動き、波源 S が静止している場合のドップラー効果を考えましょう。このとき、波長は変化しません。しかし、観測者 O が動くので、観測者 O をよぎる波動の数が変わってきます。これが、観測者 O が動き、波源 S が静止している場合に、ドップラー効果が起きる原因です。観測者 O が近づく場合の状況を図に示しました。図 (a) の

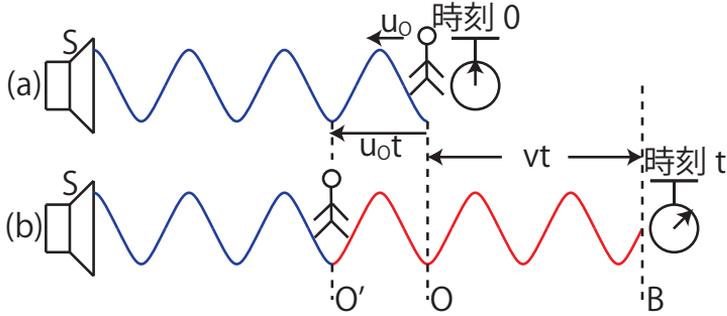


Figure 4.5: ドップラー効果 2

ときは、時刻 $0[s]$ で波源 S からの波動が地点 O に到着した瞬間です。図 (b) のときは、それから $t[s]$ 間、時間が経過したときで、波動は $vt[m]$ 右に進み、観測者 O は左に $u_0 t[m]$ 移動しています。時間 $t[s]$ の間に観測者 O が観測する波動の数は、観測者 O をよぎった区間 $O'B$ 間に含まれる波動の数で、それは観測される振動数を $f'[Hz]$ として $f't[\text{個}]$ に一致します。もし、観測者 O が動かなかつたら、時刻 $t[s]$ 間に区間 OB 間の波動が観測者 O をよぎります。観測者 O が近づく状況では、 OO' 間の分だけよぎる波動の数が増えています。(観測者をよぎる波動を赤色で表しています。) したがって、振動数は大きくなります。故に、次式のように計算されます。

$$\begin{aligned} f't &= \frac{O'B}{\lambda} \\ &= \frac{vt + u_0 t}{\lambda} \end{aligned}$$

ですから、

$$f' = \frac{v + u_0}{\lambda} \quad (4.5)$$

となります。計算を続けます。

$$\begin{aligned} f' &= (v + u_0) \frac{1}{\lambda} \\ &= (v + u_0) \frac{f_0}{v} \end{aligned}$$

したがって、

$$f' = \frac{v + u_0}{v} f_0 \quad (4.6)$$

となります。確かに、振動数は大きくなっています。次に、観測者 O が遠ざかる場合を考えましょう。状況を図に示します。図 (a) のときは、時刻 $0[s]$ で波源 S からの波動が地点

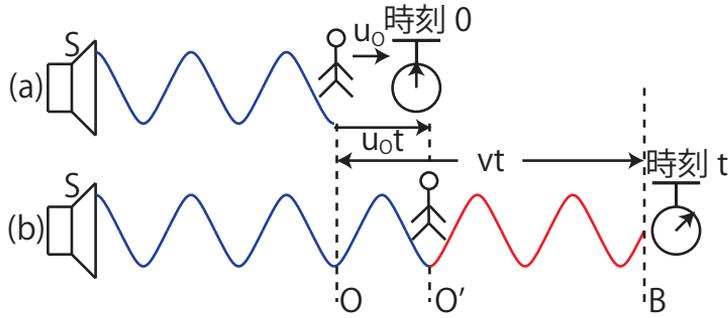


Figure 4.6: ドップラー効果 3

O に到着した瞬間です。図 (b) のときは、それから $t[s]$ 間、時間が経過したときで、波動は $vt[m]$ 右に進み、観測者 O は右に $u_0 t[m]$ 移動しています。時間 $t[s]$ の間に観測者 O が観測する波動の数は、観測者 O をよぎった区間 $O'B$ 間に含まれる波動の数で、それは観測される振動数を $f'[Hz]$ として $f't[\text{個}]$ に一致します。もし、観測者 O が動かなかつたら、時刻 $t[s]$ 間に区間 OB 間の波動が観測者 O をよぎります。観測者 O が遠ざかる状況では、 OO' 間の分だけよぎる波動の数が減っています。(観測者をよぎる波動を赤色で表しています。) したがって、振動数は小さくなります。故に、次式のように計算されます。

$$\begin{aligned} f't &= \frac{O'B}{\lambda} \\ &= \frac{vt - u_0 t}{\lambda} \end{aligned}$$

したがって、

$$f' = \frac{v - u_0}{\lambda} \quad (4.7)$$

となります。計算を続けます。

$$\begin{aligned} f' &= (v - u_0) \frac{1}{\lambda} \\ &= (v - u_0) \frac{f_0}{v} \end{aligned}$$

故に、

$$f' = \frac{v - u_0}{v} f_0 \quad (4.8)$$

となります。確かに、振動数は小さくなっています。

それでは、波源 S と観測者 O がともに動く場合はどのようになるのでしょうか？ 波源 S が動くので、観測される波長 $\lambda'[m]$ は、(4.1) 式と (4.3) 式より、

$$\lambda' = \frac{v \pm u_s}{f_0} \quad (4.9)$$

と表されます。(プラスマイナスの符号は、波源 S が遠ざかるときと、近づくときに対応します。) この波長の波動の中で観測者 O が動くので、観測される振動数 f' [Hz] は、(4.5) 式と (4.7) 式より、次のようになります。(u_O [m/s] の前のプラスマイナスの符号は、観測者 O が近づく場合と、遠ざかる場合に対応します。)

$$\begin{aligned} f' &= \frac{v \pm u_O}{\lambda'} \\ &= (v \pm u_O) \frac{1}{\lambda'} \\ &= (v \pm u_O) \frac{f_0}{v \pm u_S} \end{aligned}$$

故に、

$$f' = \frac{v \pm u_O}{v \pm u_S} f_0 \quad (4.10)$$

が成立します。(4.10) 式のプラスマイナスの符号は、物理的な意味を考えて決定すればよいです。つまり、波源 S と観測者 O がお互いに近づくときには、振動数が大きくなり、お互いに遠ざかるときには、振動数が小さくなるように符号を決めればよいということです。また、(4.10) 式は、(4.2) 式、(4.4) 式、(4.6) 式、(4.8) 式を含んでいます。

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 5

波動方程式

5.1 正弦波

正弦波を表す式を導出します。つまり，正弦波の波動一般量の時間的，かつ空間的変化を表すことにします。まず，原点の調和振動子の振動の波動一般量 $\psi(t, x = 0)$ は，

$$\psi(t, x = 0) = A \sin \omega t$$

です。ここで， A は振幅であり，簡単のため初期位相は $0[\text{rad}]$ にしました。ここで，ある時刻 $t'[\text{s}]$ において，原点での波動一般量 $\psi(t = t', x)$ を図のように示しておきます。時間が

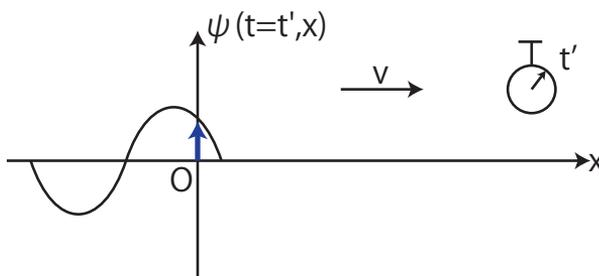


Figure 5.1: 正弦波 3

経過し，波動が $x[\text{m}]$ だけ進行します。そのときの時刻を $t[\text{s}]$ とします。原点 O の波動一般量が，原点から $x[\text{m}]$ 離れた点 P に伝わるのに，時間 $\frac{x}{v}[\text{s}]$ だけかかります。したがって，

$$\begin{aligned} t' + \frac{x}{v} &= t \\ \therefore t' &= t - \frac{x}{v} \end{aligned}$$

の関係があります。以上のことをまとめると，

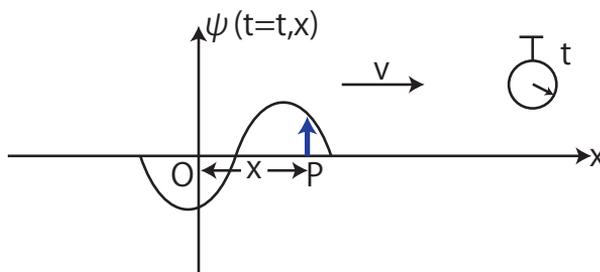


Figure 5.2: 正弦波 4

- “時刻 $t[s]$ における点 P の波動一般量は，時刻 $(t - \frac{x}{v})[s]$ における原点 O の波動一般量に等しくなります。”

ということになります．故に，正弦波を表す式は，

$\psi(\text{時刻 } t[s] \text{ における点 } P \text{ の波動一般量}) = \{ \text{時刻 } (t - \frac{x}{v})[s] \text{ における原点 } O \text{ の波動一般量} \}$

ですから，次のようになります．

$$\begin{aligned}\psi(t, x) &= A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \\ &= A \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v} x \right) \\ \therefore \psi(t, x) &= A \sin(\omega t - kx)\end{aligned}$$

ただし， $k[\text{rad}/m]$ は次式で定義される物理量であり，波数といいます．

$$\begin{aligned}k &= \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{vT} \\ \therefore k &\equiv \frac{2\pi}{\lambda}\end{aligned}$$

つまり，波数は長さ $2\pi[\text{rad}]$ の中に含まれる波の数になります．また，上式より，

$$v = \frac{\omega}{k}$$

が成立します．

正弦波を表す式には，波動一般量 ψ に対して時間 $t[s]$ と空間 $x[m]$ の 2 変数が含まれます．したがって，この式を 1 つの図に表すことはできません．そこで，時間を止めて波動一般量 ψ の空間的变化を調べるか，またはある位置に着目して波動一般量 ψ の時間的变化を調べるしか方法がありません．例えば，時間を $t = 0[s]$ に固定すると，正弦波を表す式は，

$$\begin{aligned}\psi(t, x) &= A \sin(-kx) \\ \therefore \psi(t, x) &= -A \sin kx\end{aligned}$$

となりますが，このグラフは正弦曲線をなし，時刻 $t = 0[s]$ に時間を止めたときの波形を表します．一方，ある位置として原点 O を選ぶと，正弦波を表す式は，

$$\psi(t, x) = A \sin \omega t$$

となりますが，このグラフも正弦曲線をなします．しかし，この正弦曲線は波形を表すのではないことに注意しましょう．原点という位置における波動一般量 ψ の時間的变化，つまり，振動によって波動一般量 ψ が時間とともにどのように変化するかを示しています．

次に，正弦波の位相について説明しておきます．正弦波は各点が調和振動子の振動をしています，調和振動子の運動は等速円運動の正射影の運動でした．そのとき，等速円運動の角度部分は調和振動子の位相です．したがって，正弦波の場合も各点の調和振動に各点の等速円運動が対応し，各点の位相が存在します．この各点の位相のことを正弦波の位相といいます．式の上では，正弦波を表す式の正弦の角度部分，すなわち上式では， $(\omega t - kx)[rad]$ が正弦波の位相になります．また，位相の意味を考えて，それを図示します．図の各点の

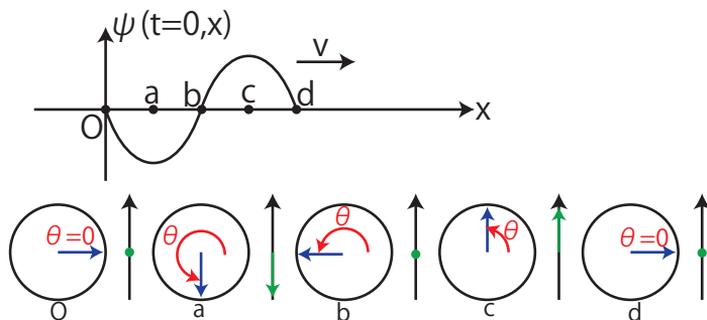


Figure 5.3: 位相

$\theta[rad]$ が正弦波の位相です．この図からわかるように，位置が1波長進むと位相は $2\pi[rad]$ 遅れます．また，時間が1周期進むと位相は $2\pi[rad]$ 進みます．

この Section の最後に，負の方向に進む正弦波を表す式を与えておきます．この式は，上の議論と全く同様に導出できますが，簡単に伝播速度 $v[m/s]$ を $-v[m/s]$ に置き換えるだけでも求められます．

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= A \sin \omega \left\{ t - \frac{x}{(-v)} \right\} \\ &= A \sin \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \\ \therefore \psi(t, x) &= A \sin(\omega t + kx) \end{aligned}$$

5.2 1次元一般波動

波形が形を変えずに、一定の速さ $v[m/s]$ で正の方向に進む波動を考えましょう。ただし、波形は任意のものとし、原点における時刻 $t'[s]$ での波動一般量 $\psi(t = t', x = 0)$ は、

$$\psi(t = t', x = 0) = f(t')$$

と表せます。関数 $f(t')$ は任意であり、原点での振動の時間的変化を表します。時間が経過し、波動が $x[m]$ だけ進行します。そのときの時刻を $t[s]$ とします。状況を図に示します。原点 O の波動一般量が、原点から $x[m]$ 離れた点 P に伝わるのに、時間 $\frac{x}{v}[s]$ だけかかりま

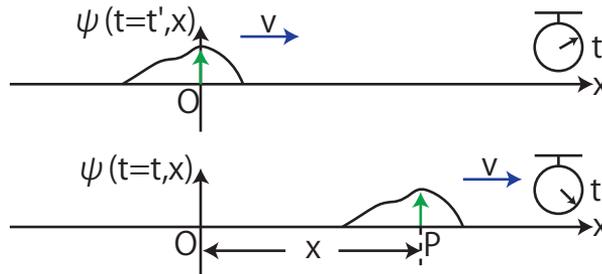


Figure 5.4: 1次元一般波動

す。したがって、

$$\begin{aligned} t' + \frac{x}{v} &= t \\ \therefore t' &= t - \frac{x}{v} \end{aligned}$$

の関係があります。以上のことをまとめると、

- “時刻 $t[s]$ における点 P の波動一般量は、時刻 $(t - \frac{x}{v})[s]$ における原点 O の波動一般量に等しくなります。”

ということになります。故に、1次元一般波動を表す式は、

$$\psi(\text{時刻 } t[s] \text{ における点 } P \text{ の波動一般量}) = \{ \text{時刻 } (t - \frac{x}{v})[s] \text{ における原点 } O \text{ の波動一般量} \}$$

ですから、

$$\psi(t, x) = f(t - \frac{x}{v})$$

となります。ここで、 f が $(t - \frac{x}{v})[s]$ の全く任意の関数であることに注意しましょう。このとき、時間 $t[s]$ を固定すると、その瞬間における ψ は波形を表しますが、この波形は縦軸が波動一般量の波形です。 ψ が変位の場合に限り、実際に目に見える波形に一致します。一

方, 位置 $x[m]$ を固定すると, ψ はその点における振動の時間的変化を表します. また, 波動が負の方向に進む場合も, 上記と同様な議論により波動一般量を表す式が導かれますが, ここでは簡単に波動の速さ $v[m/s]$ を $-v[m/s]$ に置き換えるだけで求めることができます. その結果は次のようになります.

$$\psi(t, x) = f\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

以上のような波動を 1 次元一般波動と呼ぶことにしましょう. ここで, 正弦波も 1 次元一般波動の形になっていることは明らかです. また, 余弦関数を用いても正弦波を表すことができます. これは初期位相を $\frac{\pi}{2}[\text{rad}]$ 進めることに相当します. さらに, 複素数の指数関数を用いても正弦波を表すことができます. この関数の実数部は余弦関数, 虚数部は正弦関数だからです. 以上の正弦波をまとめて記しておきます.

$$\psi(t, x) = A \sin(\omega t - kx)$$

$$\psi(t, x) = A \sin(\omega t + kx)$$

$$\psi(t, x) = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\psi(t, x) = A \cos(\omega t + kx)$$

$$\psi(t, x) = A e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\psi(t, x) = A e^{i(\omega t + kx)}$$

それぞれ, $kx[\text{rad}]$ の前の符号が負のとき正の方向に伝わる正弦波を表し, $kx[\text{rad}]$ の前の符号が正のとき負の方向に伝わる正弦波を表します.

5.3 1次元波動方程式

一定の波形, 一定の速さで伝搬する波動は, 前の Section で述べたように,

$$\psi(t, x) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\psi(t, x) = f\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

という形をもちます. 上の式が, 正の方向に進行する 1 次元一般波動, 下の式が負の方向に進行する 1 次元一般波動を表します. このとき, $\psi(t, x)$ が満たす方程式を求めてみましょう.

まず, 正の方向に進む波動について調べてみます.

$$\xi \equiv t - \frac{x}{v}$$

とおき, $\psi(t, x)$ の $t[s]$ についての 2 次導関数を求めてみます.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} &= \frac{df(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ &= \frac{df(\xi)}{d\xi} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{d}{d\xi} \left(\frac{df(\xi)}{d\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ &= \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2}\end{aligned}$$

続けて, $\psi(t, x)$ の $x[m]$ についての 2 次導関数も求めてみます.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} &= \frac{df(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{v} \frac{df(\xi)}{d\xi} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} &= \frac{d}{d\xi} \left(-\frac{1}{v} \frac{df(\xi)}{d\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= \frac{1}{v^2} \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2}\end{aligned}$$

故に, 次の 1 次元波動方程式といわれる, 波動についての基礎方程式が成立します.

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

次に, 負の方向に進む波動について調べてみます.

$$\eta \equiv t + \frac{x}{v}$$

とおき, $\psi(t, x)$ の $t[s]$ についての 2 次導関数を求めてみます.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} &= \frac{df(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{df(\eta)}{d\eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{d}{d\eta} \left(\frac{df(\eta)}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2}\end{aligned}$$

続けて, $\psi(t, x)$ の $x[m]$ についての 2 次導関数も求めてみます.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} &= \frac{df(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{1}{v} \frac{df(\eta)}{d\eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} &= \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{v} \frac{df(\eta)}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{1}{v^2} \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2}\end{aligned}$$

したがって、負の方向に進む波動についても、1次元波動方程式(5.1)式が、やはり成立します。

また、

$$\psi(t, x) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

の形の $\psi(t, x)$ も1次元波動方程式(5.1)式を満たします。このことを、次のように確かめておきます。 $\psi(t, x)$ の $t[s]$ についての2次導関数を求めてみます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} &= \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{df_2(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{df_1(\xi)}{d\xi} + \frac{df_2(\eta)}{d\eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{d}{d\xi} \left(\frac{df_1(\xi)}{d\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{df_2(\eta)}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{d^2 f_1(\xi)}{d\xi^2} + \frac{d^2 f_2(\eta)}{d\eta^2} \end{aligned}$$

続けて、 $\psi(t, x)$ の $x[m]$ についての2次導関数も求めてみます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} &= \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{df_2(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{v} \frac{df_1(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{v} \frac{df_2(\eta)}{d\eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} &= \frac{d}{d\xi} \left(-\frac{1}{v} \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{v} \frac{df_2(\eta)}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{1}{v^2} \left(\frac{d^2 f_1(\xi)}{d\xi^2} + \frac{d^2 f_2(\eta)}{d\eta^2} \right) \end{aligned}$$

故に、 $\psi(t, x)$ は1次元波動方程式(5.1)式を満たすことが確認されました。

逆に、1次元波動方程式(5.1)式を満たす関数は、

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= f\left(t - \frac{x}{v}\right) \\ \psi(t, x) &= f\left(t + \frac{x}{v}\right) \\ \psi(t, x) &= f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \end{aligned}$$

のいずれかの形をもつことを示しておきます。

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ x &= \frac{v}{2}(\eta - \xi) \end{aligned}$$

ですから、

$$\psi(t, x) = \psi\{\xi(t, x), \eta(t, x)\}$$

の関係があります。 $\psi(t, x)$ の $t[s]$ についての 2 次導関数を求めてみます。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta}\end{aligned}$$

$\psi(t, x)$ の $x[m]$ についての 2 次導関数も求めてみます。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} &= \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right)\end{aligned}$$

これらを 1 次元波動方程式 (5.1) 式に代入して計算します。

$$\begin{aligned}\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right) &= \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right) \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} &= 0\end{aligned}$$

最後の式を $\eta[s]$ について積分すると、

$$\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} = f_1'(\xi)$$

となります。ただし、 $f_1'(\xi)$ は $\eta[s]$ に依らず、 $\xi[s]$ の任意の関数です。この式を $\xi[s]$ について積分し、計算すると次式を得ます。

$$\begin{aligned}\psi(\xi, \eta) &= \int f_1'(\xi) d\xi + f_2(\eta) \\ \therefore \psi(\xi, \eta) &= f_1(\xi) + f_2(\eta) \\ \therefore \psi(t, x) &= f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)\end{aligned}$$

f_1, f_2 はそれぞれ $\xi[s], \eta[s]$ の任意の関数です。したがって、恒等的に 0 でも可です。よって、1 次元波動方程式 (5.1) 式を満たす関数は、1 次元一般波動の形、

$$\begin{aligned}\psi(t, x) &= f\left(t - \frac{x}{v}\right) \\ \psi(t, x) &= f\left(t + \frac{x}{v}\right) \\ \psi(t, x) &= f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)\end{aligned}$$

をもつことが導出されました。また、正弦波は1次元一般波動の一部として含まれるので、1次元波動方程式の1つの解として、正弦波（正弦関数、余弦関数、複素数の指数関数でそれぞれ表現されます。）があることにも注意しておきましょう。

5.4 3次元一般平面波

3次元一般平面波を考えましょう。単位ベクトル \vec{u} の向きに一定の速度 $v(=v\vec{u})[m/s]$ で進む平面波の波面の方程式は、(ただし、時刻 $t'[s]$ において平面は原点を通る場合を考えます.)

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = v(t - t')$$

です。ただし、波形は形を変えずに進行しますが、波形は任意のものとしします。原点を通る平面における時刻 $t'[s]$ での波動一般量 $\psi(t, \vec{x})$ は、

$$\psi(t', \vec{x} = 0) = f(t')$$

です。関数 $f(t')$ は任意であり、原点を含む平面での波動一般量 $\psi(t, \vec{x})$ を次の図のように示しておきます。(青枠の平面です。) 時間が経過し、平面波が $\vec{u} \cdot \vec{x}[m]$ 進行します。(緑枠の平面です。) そのときの時刻を $t[s]$ とします。原点 O を含む平面上の波動一般量 $\psi(t, \vec{x})$ が、

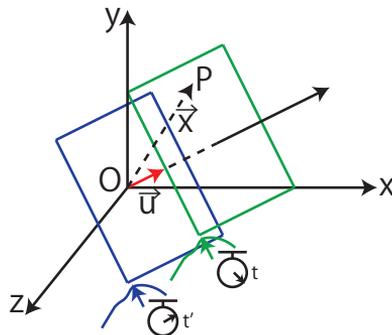


Figure 5.5: 3次元一般平面波

原点から $\vec{u} \cdot \vec{x}[m]$ 離れた平面上の点 P に伝わるのに、時間、

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v} [s]$$

だけかかります。したがって、

$$\begin{aligned} t' + \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v} &= t \\ \therefore t' &= t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v} \end{aligned}$$

の関係があります。以上のことをまとめると、

- “時刻 $t[s]$ における点 P を含む平面上の波動一般量は時刻 $(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v})[s]$ における原点 O を含む平面上の波動一般量に等しくなります。”

ということになります。故に、3次元一般平面波を表す式は、

$$\begin{aligned} & \psi(\text{時刻 } t[s] \text{ における点 } P \text{ を含む平面上の波動一般量}) \\ &= \{ \text{時刻 } (t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v})[s] \text{ における原点 } O \text{ を含む平面上の波動一般量} \} \end{aligned}$$

ですから、

$$\psi(t, \vec{x}) = f(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v})$$

となります。ここで、波動が負の方向に進む場合も、上記と同様な議論により波動一般量を表す式が導けますが、ここでは簡単に伝搬速度 $v[m/s]$ を $-v[m/s]$ に置き換えるだけで求めておきます。その結果は次のようになります。

$$\psi(t, \vec{x}) = f(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v})$$

以上が、3次元一般平面波を表す式です。

3次元正弦波は3次元一般平面波の一種になります。正弦関数を使った正の方向に進行する正弦波については、表式は次のようになります。

$$\begin{aligned} \psi(t, \vec{x}) &= A \sin \omega(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}) \\ &= A \sin(\omega t - k\vec{u} \cdot \vec{x}) \end{aligned}$$

ここで、

$$\vec{k} \equiv k\vec{u}$$

として波数ベクトルを表記すると、このベクトルは大きさが波数を示し、向きは波動の進行方向を表します。このとき、 $\psi(t, \vec{x})$ は、

$$\psi(t, \vec{x}) = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$$

となります。負の方向に進行する波動も含めて、他の3次元正弦波も同じように導出できます。3次元正弦波をまとめておきます。

$$\psi(t, \vec{x}) = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$$

$$\psi(t, \vec{x}) = A \sin(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})$$

$$\psi(t, \vec{x}) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$$

$$\psi(t, \vec{x}) = A \cos(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})$$

$$\psi(t, \vec{x}) = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

$$\psi(t, \vec{x}) = A e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

5.5 3次元波動方程式

一定の波形，一定の速さで伝搬する3次元一般平面波は，前のSectionで述べたように，

$$\begin{aligned}\psi(t, \vec{x}) &= f\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right) \\ \psi(t, \vec{x}) &= f\left(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right)\end{aligned}$$

という形をもちます．上の式が，正の方向に進行する3次元一般平面波，下の式が負の方向に進行する3次元一般平面波を表します．このとき， $\psi(t, \vec{x})$ が満たす方程式を求めてみましょう．

まず，正の方向に進む波動について調べてみます．

$$\xi \equiv t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}$$

とおき， $\psi(t, \vec{x})$ の $t[s]$ についての2次導関数を求めてみます．

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial t} &= \frac{df(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ &= \frac{df(\xi)}{d\xi} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial t^2} &= \frac{d}{d\xi} \left(\frac{df(\xi)}{d\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ &= \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2}\end{aligned}$$

続けて， $\psi(t, \vec{x})$ の $x[m]$ についての2次導関数も求めてみます．

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial x} &= \frac{df(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= -\frac{u_x}{v} \frac{df(\xi)}{d\xi} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial x^2} &= \frac{d}{d\xi} \left(-\frac{u_x}{v} \frac{df(\xi)}{d\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= \frac{u_x^2}{v^2} \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2}\end{aligned}$$

$y[m], z[m]$ についても同様です．故に，

$$\frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial z^2} = \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{v^2} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

ですが， \vec{u} は単位ベクトルであり，右辺の f の $\xi[s]$ についての2階微分を $\psi(t, \vec{x})$ の時間の2階微分でおきかえると，

$$\frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial t^2}$$

となります。したがって、次の3次元波動方程式といわれる、3次元一般平面波についての基礎方程式が成立します。

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(t, \vec{x})$$

ここで、記号ナブラ ∇ ,

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

を導入すると、

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

となりますので、3次元波動方程式は、

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi(t, \vec{x})} \quad (5.2)$$

と表すことができます。

次に、負の方向に進む波動について調べてみます。

$$\eta \equiv t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}$$

とおき、 $\psi(t, \vec{x})$ の $t[s]$ についての2次導関数を求めてみます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial t} &= \frac{df(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{df(\eta)}{d\eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial t^2} &= \frac{d}{d\eta} \left(\frac{df(\eta)}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} \end{aligned}$$

続けて、 $\psi(t, \vec{x})$ の $x[m]$ についての2次導関数も求めてみます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial x} &= \frac{df(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{u_x}{v} \frac{df(\eta)}{d\eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial x^2} &= \frac{d}{d\eta} \left(\frac{u_x}{v} \frac{df(\eta)}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{u_x^2}{v^2} \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} \end{aligned}$$

$y[m], z[m]$ についても同様です. $\psi(t, \vec{x})$ の $t[s]$ と $x[m]$ についての 2 次の導関数の表式が正の方向に進行する場合の $\xi[s]$ を $\eta[s]$ で置き換えたものなので, 3 次元波動方程式 (5.2) の導出は前述のものと同様になります.

また,

$$\psi(t, \vec{x}) = f_1\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right)$$

の形の $\psi(t, \vec{x})$ も 3 次元波動方程式 (5.2) 式を満たします. このことを, 次のように確かめておきます. $\psi(t, \vec{x})$ の $t[s]$ についての 2 次導関数を求めてみます.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial t} &= \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{df_2(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{df_1(\xi)}{d\xi} + \frac{df_2(\eta)}{d\eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial t^2} &= \frac{d}{d\xi} \left(\frac{df_1(\xi)}{d\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{df_2(\eta)}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{d^2 f_1(\xi)}{d\xi^2} + \frac{d^2 f_2(\eta)}{d\eta^2} \end{aligned}$$

続けて, $\psi(t, \vec{x})$ の $x[m]$ についての 2 次導関数も求めてみます.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial x} &= \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{df_2(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= -\frac{u_x}{v} \frac{df_1(\xi)}{d\xi} + \frac{u_x}{v} \frac{df_2(\eta)}{d\eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial x^2} &= \frac{d}{d\xi} \left(-\frac{u_x}{v} \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{u_x}{v} \frac{df_2(\eta)}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{u_x^2}{v^2} \left(\frac{d^2 f_1(\xi)}{d\xi^2} + \frac{d^2 f_2(\eta)}{d\eta^2} \right) \end{aligned}$$

$y[m], z[m]$ についても同様です. 故に,

$$\frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial z^2} = \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{v^2} \left(\frac{d^2 f_1(\xi)}{d\xi^2} + \frac{d^2 f_2(\eta)}{d\eta^2} \right)$$

ですが, \vec{u} は単位ベクトルであり, 右辺の括弧の中を $\psi(t, \vec{x})$ の時間の 2 階微分でおきかえると,

$$\frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial t^2}$$

となります. 故に, $\psi(t, \vec{x})$ は 3 次元波動方程式 (5.2) 式を満たすことが確認されました.

逆に, 3 次元波動方程式 (5.2) 式を満たす関数は,

$$\begin{aligned} \psi(t, \vec{x}) &= f\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right) \\ \psi(t, \vec{x}) &= f\left(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right) \\ \psi(t, \vec{x}) &= f_1\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right) \end{aligned}$$

のいずれかの形をもつことを示しておきます。

$$t = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = \frac{v}{2}(\eta - \xi)$$

なので,

$$\psi(t, \vec{x}) = \psi(\xi(t, \vec{x}), \eta(t, \vec{x}))$$

となります。 $\psi(t, \vec{x})$ の $t[s]$ についての 2 次導関数を求めてみます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial t} &= \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned}$$

$\psi(t, \vec{x})$ の $x[m]$ についての 2 次導関数も求めてみます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial x} &= \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= -\frac{u_x}{v} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{u_x}{v} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{u_x}{v} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{u_x}{v} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{u_x}{v} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{u_x}{v} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{u_x^2}{v^2} \left(\frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right) \end{aligned}$$

$y[m], z[m]$ についても同様な式が得られます。これらを 3 次元波動方程式 (5.2) 式に代入して計算します。

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right) &= \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{v^2} \left(\frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right) \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} &= 0 \end{aligned}$$

最後の式を $\eta[s]$ について積分すると,

$$\frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} = f_1'(\xi)$$

となります。ただし, $f_1'(\xi)$ は $\eta[s]$ を含まない $\xi[s]$ の任意の関数です。この式を $\xi[s]$ につ

いて積分し、計算していきます。

$$\begin{aligned}\psi(\xi, \eta) &= \int f_1'(\xi) d\xi + f_2(\eta) \\ \therefore \psi(\xi, \eta) &= f_1(\xi) + f_2(\eta) \\ \therefore \psi(t, \vec{x}) &= f_1\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right)\end{aligned}$$

f_1, f_2 はそれぞれ $\xi[s], \eta[s]$ の任意の関数です。したがって、恒等的に 0 でも可です。よって、3次元波動方程式 (5.2) 式を満たす関数は、3次元一般波動の形、

$$\begin{aligned}\psi(t, \vec{x}) &= f\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right) \\ \psi(t, \vec{x}) &= f\left(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right) \\ \psi(t, \vec{x}) &= f_1\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{v}\right)\end{aligned}$$

をもつことが導出されました。また、正弦波は3次元一般波動の一部として含まれるので、3次元波動方程式の1つの解として、正弦波（正弦関数、余弦関数、複素数の指数関数でそれぞれ表現されます。）があることにも注意しておきましょう。

次に、3次元球面波が1次元波動方程式 (5.1) 式と同形の方程式の解として得られることを示します。便宜上、波源を原点におきます。点 $\vec{x}[m]$ の波源からの距離 $r[m]$ は、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

です。故に、次の関係があることがわかります。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(t, r)}{\partial x} &= \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= \frac{x}{r} \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r} \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi(t, r)}{\partial x^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r} + x \left(-\frac{1}{2} \frac{2x}{r^3}\right) \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r} + \frac{x}{r} \frac{\partial^2 \psi(t, r)}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi(t, r)}{\partial r^2}\end{aligned}$$

$y[m], z[m]$ についても、同様な式が得られます。したがって、次式を得ます。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi(t, r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(t, r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(t, r)}{\partial z^2} &= \frac{3}{r} \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi(t, r)}{\partial r^2} \\ &= 2 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi(t, r)}{\partial r^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \psi(t, r))\end{aligned}$$

最後の式を，3次元波動方程式 (5.2) 式に代入して変形します．

$$\begin{aligned}\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(t, r)}{\partial t^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi(t, r)) \\ \therefore \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\psi(t, r)) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi(t, r))\end{aligned}$$

これは，1次元波動方程式 (5.1) 式において， $\psi(t, x)$ を $r\psi(t, r)$ で置き換えた式なので，その解は次の通りです．

$$\begin{aligned}r\psi(t, r) &= f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{v}\right) \\ \therefore \psi(t, r) &= \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)\end{aligned}$$

最後の式の右辺第1項は，波源からあらゆる方向へ速さ $v[m/s]$ で伝わる波動を，右辺第2項はあらゆる方向から速さ $v[m/s]$ で波源に集まる波動を表しています．また，それぞれの項に $r[m]$ の逆数が含まれているのは，波源から離れると振幅が減少することを示しています．

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 6

干渉と回折

6.1 重ね合わせの原理

2つの波動が衝突する場合、どのような現象が起こるのでしょうか？実際にウェーブマシンという波動を作る簡単な装置を使って試してみると、図のような結果になることが確かめられます。図の青色で示されている2つのパルス波を衝突させるのですが、それぞれの変位を $\psi_1(t, x)$ と $\psi_2(t, x)$ とします。緑色で示されている波動が、衝突した際にできる波形であり、合成波といいます。そして、その変位を $\psi(t, x)$ と表します。このとき、

$$\psi(t, x) = \psi_1(t, x) + \psi_2(t, x)$$

という関係が成立することが観測されます。この関係を重ね合わせの原理といいます。また、衝突した後は、元の波動が何事もなかったかのように素通りしていくことが観測されます。このことを波動の独立性といいます。以上の重ね合わせの原理および波動の独立性は、ウェーブマシンを使った初等的な実験事実であると理解できます。

重ね合わせの原理に関して、前の Chapter の 3次元波動方程式、

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi(t, \vec{x}) \quad (6.1)$$

を使って議論を深めていきましょう。ここで、3次元波動方程式において、 $\psi(t, \vec{x})$ は変位だけに留まらず、波動一般量を表すものであったことに注意します。重ね合わせの原理は変位だけでなく、波動が運ぶ一般量について成立することを併せて議論するのです。実際に行うことは、

$$\psi_1(t, \vec{x})$$

$$\psi_2(t, \vec{x})$$

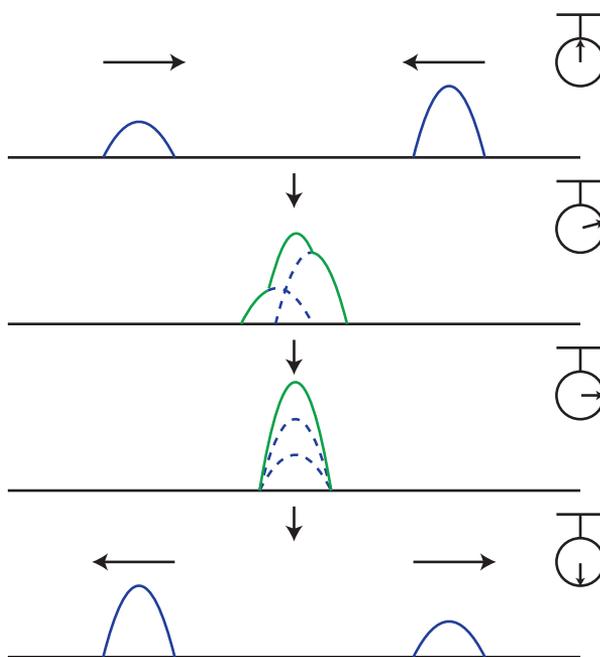


Figure 6.1: 重ね合わせの原理

が, (6.1) 式のそれぞれの解であるとき, c_1, c_2 を実定数であるとして,

$$\psi(t, \vec{x}) = c_1\psi_1(t, \vec{x}) + c_2\psi_2(t, \vec{x})$$

が, やはり解であることを証明するのです. このことは (6.1) 式の微分方程式の線形性を利用して, 次のように実行できます.

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial t^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (c_1\psi_1(t, \vec{x}) + c_2\psi_2(t, \vec{x}))}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{v^2} \left(c_1 \frac{\partial^2 \psi_1(t, \vec{x})}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial^2 \psi_2(t, \vec{x})}{\partial t^2} \right) \\ &= c_1 \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_1(t, \vec{x})}{\partial t^2} + c_2 \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2(t, \vec{x})}{\partial t^2} \\ &= c_1 \nabla^2 \psi_1(t, \vec{x}) + c_2 \nabla^2 \psi_2(t, \vec{x}) \\ &= \nabla^2 (c_1\psi_1(t, \vec{x}) + c_2\psi_2(t, \vec{x})) \\ &= \nabla^2 \psi(t, \vec{x}) \end{aligned}$$

(証明終.) さらに, 波動の数を N 個にして, 各波動一般量に実定数を掛けた量についても

同様な関係が成立することが、次のように数学的に証明されます。つまり、

$$\begin{aligned} &\psi_1(t, \vec{x}) \\ &\quad \vdots \\ &\psi_N(t, \vec{x}) \end{aligned}$$

が、(6.1) 式のそれぞれの解であるとき、 c_1, \dots, c_N を実定数であるとして、

$$\psi(t, \vec{x}) = \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(t, \vec{x}) = c_1 \psi_1(t, \vec{x}) + \dots + c_N \psi_N(t, \vec{x})$$

も、やはり解であることが、次のように示されます。

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial t^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (c_1 \psi_1(t, \vec{x}) + \dots + c_N \psi_N(t, \vec{x}))}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{v^2} \left(c_1 \frac{\partial^2 \psi_1(t, \vec{x})}{\partial t^2} + \dots + c_N \frac{\partial^2 \psi_N(t, \vec{x})}{\partial t^2} \right) \\ &= c_1 \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_1(t, \vec{x})}{\partial t^2} + \dots + c_N \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_N(t, \vec{x})}{\partial t^2} \\ &= c_1 \nabla^2 \psi_1(t, \vec{x}) + \dots + c_N \nabla^2 \psi_N(t, \vec{x}) \\ &= \nabla^2 (c_1 \psi_1(t, \vec{x}) + \dots + c_N \psi_N(t, \vec{x})) \\ &= \nabla^2 \psi(t, \vec{x}) \end{aligned}$$

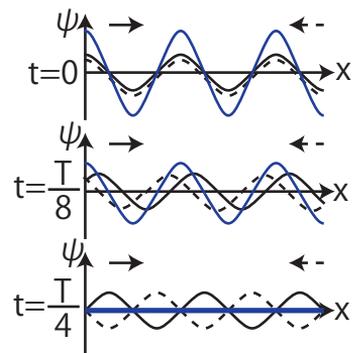
(証明終.) 次の拡張した重ね合わせの原理が成立することが確かめられました。すなわち、

原理 6.1 (重ね合わせの原理) “複数の波動一般量が波動方程式を満たすとき、それらの波動一般量に実定数をかけて加え合わせた量も、波動方程式の解になります。”

が成り立ちます。以下の Section で、重ね合わせの原理を使って説明される波動独特の現象に関して、見ていくことにしましょう。(主に、2つの波動についての狭義の重ね合わせの原理を使っていくことになります。)

6.2 定常波

振幅・波長・周期の等しい、2つの正弦波が逆向きに進みながら重なり合う場合を考えましょう。図にその様子を示しました。黒い実線の波動が右向きへ、黒い破線の波動が左向きに進んでいます。そして、それらの合成波は青い実線で表しています。また、 $\frac{T}{8}$ [s] 毎の様子を示しました。この図からわかるように、合成波は



右にも左にも進みません。このように、振動するが進まない波動を定常波といいます。それに対して、もとの波動のように進む波を進行波といいます。定常波において、最も振動する点を腹、全く振動しない点を節といいます。また、図のように定常波の腹2つ分で波長 $\lambda[m]$ を定義すると、それはもとの進行波の波長に等しくなります。さらに、図を見るとわかるように、媒質が1振動するのに要する時間（定常波の周期）は、もとの進行波の周期に等しくなっています。

定常波について、数式を用いて取り扱ってみましょう。振幅・波長・周期が等しく、 x 軸上をお互いに逆向きに進む2つの正弦波を、

$$\psi_1(t, x) = A \sin(\omega t - kx)$$

$$\psi_2(t, x) = A \sin(\omega t + kx + \theta_0)$$

と表しておきます。 $\psi_1(t, x)$ は正の方向へ進む正弦波、 $\psi_2(t, x)$ は負の方向へ進む正弦波です。時刻 $0[s]$ で原点の位相、すなわち初期位相を、 $\psi_1(t, x)$ では $0[rad]$ 、 $\psi_2(t, x)$ では $\theta_0[rad]$ とおきます。重ね合わせの原理より、合成波の一般物理量 $\psi(t, x)$ は次のように計算されます。

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \psi_1(t, x) + \psi_2(t, x) \\ &= A \sin(\omega t - kx) + A \sin(\omega t + kx + \theta_0) \\ &= 2A \sin\left\{\frac{(\omega t - kx) + (\omega t + kx + \theta_0)}{2}\right\} \cos\left\{\frac{(\omega t - kx) - (\omega t + kx + \theta_0)}{2}\right\} \\ &= 2A \sin\left(\omega t + \frac{\theta_0}{2}\right) \cos\left(-kx - \frac{\theta_0}{2}\right) \\ &= 2A \cos\left(kx + \frac{\theta_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\theta_0}{2}\right) \end{aligned}$$

上式によれば、 $\psi(t, x)$ の変化は各点の場所によって決まる振幅、

$$2A \cos\left(kx + \frac{\theta_0}{2}\right)$$

をもった調和振動となり、その角振動数は全ての場所で同一です。したがって、空間的な波形は進みません。また、振幅を $0[m]$ とおいて、

$$\begin{aligned} 2A \cos\left(kx + \frac{\theta_0}{2}\right) &= 0 \\ \therefore kx + \frac{\theta_0}{2} &= n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

の点では全く振動しません。(この位置は節になります。) 逆に、振幅が最大となるのは、

$$2A \cos(kx + \frac{\theta_0}{2}) = \pm 2A$$

$$\therefore \cos(kx + \frac{\theta_0}{2}) = \pm 1$$

$$\therefore kx + \frac{\theta_0}{2} = n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

の点です。(この位置は腹になります。)

6.3 干渉

2次元平面上で同位相の2つの波源 S_1 と S_2 から球面波の連続波を発生させた場合を考えましょう。 S_1 と S_2 が山の瞬間、重ね合わせの原理に従い、どのような様子になるかを描いたのが図“干渉”です。(波動の減衰は無視しています。) 例えば、図の点 P の場合、 S_1 か

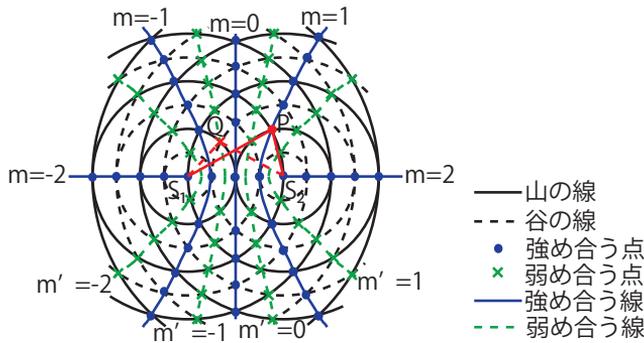


Figure 6.3: 干渉

らの波動は山、 S_2 からの波動も山であり、重ね合わせの原理より、大きな山ができて強めあいます。このとき、波源からの距離の差の絶対値（経路差）を計算すると次のようになります。

$$|S_1P - S_2P| = |2\lambda - \lambda| = \lambda$$

一般に、経路差が波長の整数倍のとき強め合います。すなわち、強め合う点 P が満たす条件は、

$$|S_1P - S_2P| = m\lambda (m = 0, 1, 2, \dots)$$

すなわち、

$$r_1 - r_2 = m\lambda (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{6.2}$$

です。ただし、 $S_1P \equiv r_1, S_2P \equiv r_2$ とおきました。一方、図の点 Q の場合、 S_1 からの波動は山、 S_2 からの波動は谷であり、重ね合わせの原理より弱め合い、ほとんど振動しません。

このとき、波源からの距離の差の絶対値（経路差）を計算すると次のようになります。

$$|S_1Q - S_2Q| = |\lambda - \frac{3}{2}\lambda| = \frac{1}{2}\lambda$$

一般に、経路差が波長の整数倍から半波長ずれたとき弱め合います。すなわち、弱め合う点 Q が満たす条件は、

$$|S_1Q - S_2Q| = m'\lambda + \frac{\lambda}{2} \quad (m' = 0, 1, 2, \dots)$$

すなわち、

$$r_1 - r_2 = m'\lambda + \frac{\lambda}{2} \quad (m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (6.3)$$

です。ただし、 $S_1Q \equiv r_1, S_2Q \equiv r_2$ とおきました。このように、2つの波動が強め合ったり、弱め合ったりする現象を干渉といいます。なお、線分 S_1S_2 上は、振幅・波長・周期の等しい2つの正弦波が衝突するので、定常波ができています。図の青い実線は強め合う線ですが、この線上には外向きの進行波ができていて、元の球面波よりも速く進むことが図より理解されます。

図では S_1 と S_2 が山の瞬間の場合を描きましたが、半周期後は S_1, S_2 ともに谷になっていて、(6.2) 式と (6.3) 式の条件式はそのまま成立しています。一般に、 S_1 と S_2 が同位相の場合、その位相を $\theta(t)[rad]$ とおき、(6.2) 式と (6.3) 式の条件式が確かに成立することを確認しましょう。点 R における S_1 からの波動の位相を $\theta_{R1}(t)[rad]$ 、点 R における S_2 からの波動の位相を $\theta_{R2}(t)[rad]$ とします。距離 1 波長につき、位相は $2\pi[rad]$ 遅れるので、次式が成立します。

$$\begin{aligned} \theta_{R1} &= \theta(t) - 2\pi \frac{S_1R}{\lambda} \\ \theta_{R2} &= \theta(t) - 2\pi \frac{S_2R}{\lambda} \end{aligned}$$

R が強め合う点 P の場合、 $\theta_{P1}(t)[rad]$ と $\theta_{P2}(t)[rad]$ の位相が揃っているので、位相差は $2\pi[rad]$ の整数倍です。故に、

$$\begin{aligned} |\theta_{P1}(t) - \theta_{P2}(t)| &= 2\pi m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \\ \therefore \left| \left\{ \theta(t) - 2\pi \frac{S_1P}{\lambda} \right\} - \left\{ \theta(t) - 2\pi \frac{S_2P}{\lambda} \right\} \right| &= 2\pi m \\ \therefore \frac{2\pi}{\lambda} | -S_1P + S_2P | &= 2\pi m \\ \therefore |S_1P - S_2P| &= m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \\ \therefore r_1 - r_2 &= m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

となり、前述した条件式 (6.2) 式が導出されました。一方、 R が弱め合う点 Q の場合、 $\theta_{Q1}(t)[rad]$ と $\theta_{Q2}(t)[rad]$ の位相が反対なので、位相差は $2\pi[rad]$ の整数倍から $\pi[rad]$ ず

れています。故に、

$$\begin{aligned}
 |\theta_{Q_1}(t) - \theta_{Q_2}(t)| &= 2\pi m' + \pi \quad (m' = 0, 1, 2, \dots) \\
 \therefore \left| \left\{ \theta(t) - 2\pi \frac{S_1 Q}{\lambda} \right\} - \left\{ \theta(t) - 2\pi \frac{S_2 Q}{\lambda} \right\} \right| &= 2\pi m' + \pi \\
 \therefore \frac{2\pi}{\lambda} | -S_1 Q + S_2 Q | &= 2\pi m' + \pi \\
 \therefore |S_1 Q - S_2 Q| &= m' \lambda + \frac{\lambda}{2} \quad (m' = 0, 1, 2, \dots) \\
 \therefore r_1 - r_2 &= m' \lambda + \frac{\lambda}{2} \quad (m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)
 \end{aligned}$$

となります。やはり、前述と同じ条件式 (6.3) 式が導かれました。

それでは、同位相の2つの波源からの振幅・波長・周期の等しい3次元球面波の干渉を、正弦波の波動一般量 $\psi(t, r)$ の表式を使って扱ってみましょう。3次元球面波の波動方程式の解は、“波動方程式”のChapterの最後の議論により、

$$\psi(t, r) = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

です。 $r[m]$ は波源からの距離です。ここでは、外向きの減衰する正弦波を考えて、右辺第1項の解のみを取り上げることにします。平面上のある点 R に対して、 S_1 からの波動の一般量 $\psi_1(t, r_1)$ と、 S_2 からの波動の一般量 $\psi_2(t, r_2)$ は次のように表されます。

$$\begin{aligned}
 \psi_1(t, r_1) &= \frac{A}{r_1} \sin(\omega t - kr_1) \\
 \psi_2(t, r_2) &= \frac{A}{r_2} \sin(\omega t - kr_2)
 \end{aligned}$$

ただし、 A は定数です。点 R における2つの球面波が重ね合わされた波動一般量 $\psi(t, r_1, r_2)$ は、重ね合わせの原理より次のように計算されます。

$$\begin{aligned}
 \psi(t, r_1, r_2) &= \psi(t, r_1) + \psi(t, r_2) \\
 &= \frac{A}{r_1} \sin(\omega t - kr_1) + \frac{A}{r_2} \sin(\omega t - kr_2) \\
 &= \frac{A}{r_1} (\sin \omega t \cos kr_1 - \cos \omega t \sin kr_1) + \frac{A}{r_2} (\sin \omega t \cos kr_2 - \cos \omega t \sin kr_2) \\
 &= \left(\frac{A}{r_1} \cos kr_1 + \frac{A}{r_2} \cos kr_2 \right) \sin \omega t - \left(\frac{A}{r_1} \sin kr_1 + \frac{A}{r_2} \sin kr_2 \right) \cos \omega t
 \end{aligned}$$

ここで、次のようにおきます。

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{r_1} \cos kr_1 + \frac{A}{r_2} \cos kr_2 &= A'(r_1, r_2) \sin \delta \\
 \frac{A}{r_1} \sin kr_1 + \frac{A}{r_2} \sin kr_2 &= A'(r_1, r_2) \cos \delta
 \end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned}\psi(t, r_1, r_2) &= A'(r_1, r_2)(\sin \delta \sin \omega t - \cos \delta \cos \omega t) \\ &= -A'(r_1, r_2) \cos(\omega t + \delta)\end{aligned}$$

であり, $A'(r_1, r_2)[m]$ は次のように計算されます.

$$\begin{aligned}A'^2(r_1, r_2) \sin^2 \delta + A'^2(r_1, r_2) \cos^2 \delta &= \left(\frac{A}{r_1} \cos kr_1 + \frac{A}{r_2} \cos kr_2\right)^2 + \left(\frac{A}{r_1} \sin kr_1 + \frac{A}{r_2} \sin kr_2\right)^2 \\ \therefore A'^2(r_1, r_2) &= \left(\frac{A}{r_1}\right)^2 (\sin^2 kr_1 + \cos^2 kr_1) + \left(\frac{A}{r_2}\right)^2 (\sin^2 kr_2 + \cos^2 kr_2) + 2 \frac{A^2}{r_1 r_2} (\cos kr_1 \cos kr_2 + \sin kr_1 \sin kr_2) \\ \therefore A'^2(r_1, r_2) &= \left(\frac{A}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{A}{r_2}\right)^2 + 2 \frac{A^2}{r_1 r_2} \cos k(r_1 - r_2)\end{aligned}$$

故に,

$$A'(r_1, r_2) = \left\{ \left(\frac{A}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{A}{r_2}\right)^2 + 2 \frac{A^2}{r_1 r_2} \cos k(r_1 - r_2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6.4)$$

となります. また, $\delta[rad]$ は次のように表されます.

$$\begin{aligned}\frac{A'(r_1, r_2) \sin \delta}{A'(r_1, r_2) \cos \delta} &= \frac{\frac{A}{r_1} \cos kr_1 + \frac{A}{r_2} \cos kr_2}{\frac{A}{r_1} \sin kr_1 + \frac{A}{r_2} \sin kr_2} \\ \therefore \tan \delta &= \frac{\frac{A}{r_1} \cos kr_1 + \frac{A}{r_2} \cos kr_2}{\frac{A}{r_1} \sin kr_1 + \frac{A}{r_2} \sin kr_2}\end{aligned}$$

(6.4) 式からわかるように, 強め合う条件式 (6.2) 式は次のように導出されます.

$$\begin{aligned}\cos k(r_1 - r_2) &= 1 \\ \therefore \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) &= 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ \therefore r_1 - r_2 &= m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\end{aligned}$$

一方, 弱め合う条件式 (6.3) 式は, 次のように導出されます.

$$\begin{aligned}\cos k(r_1 - r_2) &= -1 \\ \therefore \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) &= 2\pi m' + \pi \quad (m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ \therefore r_1 - r_2 &= m'\lambda + \frac{\lambda}{2} \quad (m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\end{aligned}$$

以上の条件は, 前述したものと一致することが確認されます.

6.4 回折

波動の進路にその波動を伝えない障害物による隙間がある場合、その障害物の背後に波動が回り込む現象を回折といいます。回折は隙間や障害物の幅に対して波長が小さいとき顕著には起こりませんが、同程度以上になると目立つようになります。

6.5 波束

振幅が同じで、波数、角振動数が少し違う、同じ向きに進む1次元の2つの正弦波があるときに起こる現象について考えましょう。2つの正弦波は次式で表されます。

$$\psi_1(t, x) = A \sin(\omega_1 t - k_1 x + \theta_1)$$

$$\psi_2(t, x) = A \sin(\omega_2 t - k_2 x + \theta_2)$$

重ね合わせの原理により、合成波の波動一般量 $\psi(t, x)$ は次のようになります。

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \psi_1(t, x) + \psi_2(t, x) \\ &= A\{\sin(\omega_1 t - k_1 x + \theta_1) + \sin(\omega_2 t - k_2 x + \theta_2)\} \\ &= 2A \sin \frac{(\omega_1 t - k_1 x + \theta_1) + (\omega_2 t - k_2 x + \theta_2)}{2} \cos \frac{(\omega_1 t - k_1 x + \theta_1) - (\omega_2 t - k_2 x + \theta_2)}{2} \\ &= 2A \cos\left\{\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)x + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\right\} \sin\left\{\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right\} \end{aligned}$$

ここで、

$$\Delta\omega \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$\Delta k \equiv \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$$

$$\Delta\theta \equiv \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$$

と、

$$\omega \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$k \equiv \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\theta \equiv \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

とおくと、

$$\psi(t, x) = 2A \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega \cdot t - \frac{1}{2}\Delta k \cdot x + \frac{1}{2}\Delta\theta\right) \sin(\omega t - kx + \theta)$$

となります。このとき、

$$A(t, x) \equiv 2A \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega \cdot t - \frac{1}{2}\Delta k \cdot x + \frac{1}{2}\Delta\theta\right)$$

という因子は、

$$\xi(t, x) \equiv \sin(\omega t - kx + \theta)$$

と比較して、 $t[s], x[m]$ に対する変化の割合が緩やかですから、ある瞬間に空間的な波動の形を表すと図のようになります。正弦波 $\xi(t, x)$ の振幅が $A(t, x)$ のように変化しているよう

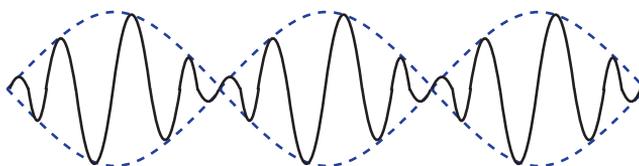


Figure 6.4: 波束

に見えます。(図で $A(t, x)$ は青い破線で表されています。) このような波動のかたまりを波束といいます。一般に、正弦波の速さは、 $v = \frac{\omega}{k}$ なので、波束の速さ（これを群速度といいます。） $v_g[m/s]$ は、

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{\frac{1}{2}\Delta\omega}{\frac{1}{2}\Delta k} \\ &= \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \end{aligned}$$

です。ここで無限小の極限をとると、群速度は、

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

となります。群速度に対して、波面の速度 $v = \frac{\omega}{k}$ を位相速度といいます。

6.6 波動のフーリエ解析

“振動”の Chapter において、フーリエ解析を取り扱いました。この Section では波動のフーリエ解析を見ていくことにしましょう。まず、フーリエ解析の数学的な一般論を整理しておきます。周期 $2L$ の関数 $f(x)$ をフーリエ級数で展開すると、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

となります。このとき、フーリエ係数は、

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

です。周期 $2L$ の複素フーリエ級数は、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i \frac{n\pi x}{L})$$

で、複素フーリエ係数は、

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp(-i \frac{n\pi x}{L}) dx \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

です。“振動”の Chapter では、これらを振動について適用しましたが、数学的な変数 x を振動の時間 $t[s]$ に、数学的な周期 $2L$ を振動の周期 $T[s]$ に、数学的な関数 $f(x)$ を振動一般量 $\psi(t)$ に置き換えました。その結果は、

$$\psi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t) \cos n\omega t \cdot dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t) \sin n\omega t \cdot dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t) e^{-in\omega t} dt \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

となりました。波動について、フーリエ級数、複素フーリエ級数はどのようになるのでしょうか？1次元空間における波動一般量 $\psi(t, x)$ の場合、変数として、時間 $t[s]$ と位置 $x[m]$ を含みます。ある位置に着目して、振動の時間的変化を考える場合については、上記の振動についての取り扱いになります。それに対して、時間を止めて、位置 $x[m]$ についての変化を考えてみましょう。例えば、複素数で表される正の方向に伝わる正弦波の場合、

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= A e^{i(\omega t - kx)} \\ &= e^{i\omega t} \cdot A e^{-ikx} \end{aligned}$$

ですから、時間を固定したとき、空間的に変動する部分は、

$$\phi(x) = A e^{-ikx}$$

になります。以降，一般的な $\phi(x)$ について考えていきます。数学的な変数 x を位置を表す $x[m]$ に，数学的な周期 $2L$ を空間的な周期である波長 $\lambda[m]$ に置き換えます。さらに，数学的な関数 $f(x)$ を，波動一般量 $\psi(t, x)$ の空間部分 $\phi(x)$ と同定します。このとき， $\phi(x)$ をフーリエ級数で表すと，

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\lambda/2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\lambda/2} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{\lambda} x + b_n \sin n \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nkx + b_n \sin nkx \right)\end{aligned}$$

とすることができます。ただし， $k[\text{rad}/m]$ は波数です。任意の波形が，

$$k, 2k, 3k, \dots$$

の波数をもつ余弦関数と正弦関数の和によって表されるのです。フーリエ係数は，

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\lambda/2} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \phi(x) \cos \frac{n\pi x}{\lambda/2} dx \\ \therefore a_n &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \phi(x) \cos nkx \cdot dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{\lambda/2} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{\lambda/2} dx \\ \therefore b_n &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \phi(x) \sin nkx \cdot dx \quad (n = 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

によって求められます。同様に，複素フーリエ級数を考えましょう。数学的な変数 x を位置を表す $x[m]$ に，数学的な周期 $2L$ を波動の空間的な周期である波長 $\lambda[m]$ に置き換えます。さらに，数学的な関数 $f(x)$ を $\phi(x)$ と同定します。このとき，複素フーリエ級数は，

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i \frac{n\pi x}{\lambda/2}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(in \frac{2\pi}{\lambda} x\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inkx}\end{aligned}$$

とすることができます。複素フーリエ係数は，

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \phi(x) \exp\left(-i \frac{n\pi x}{\lambda/2}\right) dx \\ \therefore c_n &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \phi(x) e^{-inkx} dx \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

です。

さらに、フーリエ変換とフーリエ逆変換を取り扱ってみます。数学的一般論では、フーリエ変換は、

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

で、逆フーリエ変換は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx} dk$$

でした。振動の場合を振り返ってみると、これらの式に出てくる k のところに角振動数 $\omega[\text{rad/s}]$ が入り、変数 x を時間 $t[s]$ に置き換えました。さらに、関数 $f(x)$ を振動一般量 $\psi(t)$ に同定しました。このとき、フーリエ変換は、

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)e^{-i\omega t} dt$$

となります。すなわち、 $\psi(t)$ を角振動数 $\omega[\text{rad/s}]$ の重みの分布 $g(\omega)$ で表しています。一方、フーリエ逆変換の式は、

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

となります。この式は、調和振動子の振動 $e^{i\omega t}$ に角振動数 $\omega[\text{rad/s}]$ のときの重み $g(\omega)$ をかけて重ね合わせて、 $\psi(t)$ に戻したものです。それでは、波動一般量 $\psi(t, x)$ の空間部分 $\phi(x)$ の場合を考えてみましょう。数学的な量である k を、波数 $k[\text{rad/m}]$ で、数学的な変数 x を位置 $x[m]$ で置き換え、数学的な関数 $f(x)$ を $\phi(x)$ と同定し、フーリエ変換を表すと、

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{-ikx} dx$$

となります。すなわち、 $\phi(x)$ を波数 $k[\text{rad/m}]$ の重み $g(k)$ で表しています。一方、フーリエ逆変換の式は、

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx} dk$$

となります。この式は、 e^{ikx} に波数 $k[\text{rad/m}]$ のときの重み $g(k)$ をかけて重ね合わせて、 $\phi(x)$ に戻したものです。フーリエ変換とフーリエ逆変換を3次元に拡張することもできました。数学的には3次元フーリエ変換は、

$$g(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} dx dy dz$$

であり、3次元フーリエ逆変換は、

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} dk_x dk_y dk_z$$

でした。3次元の波動一般量 $\psi(t, \vec{x})$ の空間部分 $\phi(\vec{x})$ についてフーリエ変換とフーリエ逆変換を考えましょう。 $(\phi(\vec{x}))$ の例を挙げておきます。例えば、複素数で表される正の方向に伝わる正弦波の場合、

$$\begin{aligned}\psi(t, \vec{x}) &= A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \\ &= e^{i\omega t} \cdot A e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}\end{aligned}$$

ですから、時間を固定したとき、空間的に変動する部分は、

$$\phi(\vec{x}) = A e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

となります。以下は一般的な $\phi(\vec{x})$ についての議論です。) 数学的な量 \vec{k} を波数ベクトル $\vec{k}[\text{rad/m}]$ で、数学的な変数 \vec{x} を位置ベクトル $\vec{x}[m]$ で置き換え、数学的な関数 $f(\vec{x})$ を $\phi(\vec{x})$ と同定し、3次元フーリエ変換を表すと、

$$g(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} dx dy dz$$

となります。一方、3次元フーリエ逆変換の式は、

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} dk_x dk_y dk_z$$

となります。

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

Chapter 7

反射・透過・屈折

7.1 1次元波動の反射と透過

簡単のため、1次元の場合を考えます。媒質が途中で途切れているとき、その端で波動は反射します。1本の弦の振動や、ウェーブマシンという簡単な実験装置を想定すると考えやすいでしょう。このときの反射には、端に力が働かず自由に動ける自由端の場合と、端が固定されている固定端の場合の2通りがあります。以下、順番に見ていくことにします。

まず、自由端反射について調べてみましょう。弦やウェーブマシンに沿って、 x 軸をとり、自由端を原点にして、変位を $\psi(t, x)$ とします。張力 $T[N]$ の $\psi(t, x)$ 方向の力の成分は、張力と水平成分のなす角を $\theta[\text{rad}]$ として、

$$\begin{aligned} T \sin \theta &\cong T \tan \theta \\ &= T \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \end{aligned}$$

となります。原点にある自由端における境界条件は、 $\psi(t, x)$ 方向に力が働かないので、

$$\left[\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 \quad (7.1)$$

と表せます。この条件をノイマン境界条件といいます。ここで、 $\psi(t, x)$ を波動一般量に拡張し、逆にノイマン境界条件(7.1)式が成立するときの反射を自由端反射と定義します。 $x < 0$ の方から、自由端に向かって正の向きに進む波動（入射波）、

$$\psi_i(t, x) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

が来たときを考えます。波動が自由端に達したとき、負の向きに進む反射波、

$$\psi_r(t, x) = g_1\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

が生じます。波動は重ね合わされて、

$$\psi(t, x) = f_1(t - \frac{x}{v}) + g_1(t + \frac{x}{v})$$

という波動一般量になります。ここで、

$$\begin{aligned}\xi &\equiv t - \frac{x}{v} \\ \eta &\equiv t + \frac{x}{v}\end{aligned}$$

とおきます。このとき、ノイマン境界条件 (7.1) より、

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial\psi(t, x)}{\partial x}\right]_{x=0} &= -\frac{1}{v}\left[\frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi}\right]_{x=0} + \frac{1}{v}\left[\frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta}\right]_{x=0} = 0 \\ \therefore \left[\frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi}\right]_{x=0} &= \left[\frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta}\right]_{x=0}\end{aligned}$$

となりますが、 $x = 0[m]$ のとき、 $\xi = \eta = t[s]$ となるので、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1(t)}{\partial t} &= \frac{\partial g_1(t)}{\partial t} \\ \therefore f_1(t) &= g_1(t) + const\end{aligned}$$

となります。ここで、 $f_1(t) \equiv 0$ のときには、反射波もないので、 $g_1(t) = 0$ になるので、 $const = 0$ です。したがって、

$$f_1(t) = g_1(t)$$

となります。ここで、変数 $t[s]$ を変数 $\eta[s]$ に置き換えて、

$$f_1(\eta) = g_1(\eta)$$

とします。このとき、反射波は、

$$\begin{aligned}\psi_r(t, x) &= g_1(t + \frac{x}{v}) \\ &= f_1(t + \frac{x}{v})\end{aligned}$$

です。つまり、入射波と反射波の関係は、

$$\psi_r(t, x) = \psi_i(t, -x)$$

となります。反射波を求めるには、媒質が $x > 0$ まで続いているとみなし入射波を延長して、その入射波の延長をそのまま縦軸に関して折り返せばよいのです。連続した正弦波を送り続けた場合を図示します。この場合、入射波と反射波は振幅・波長・周期が等しく反対向きに進んでいるので、合成波は定常波になります。また、自由端そのものは定常波の腹になります。

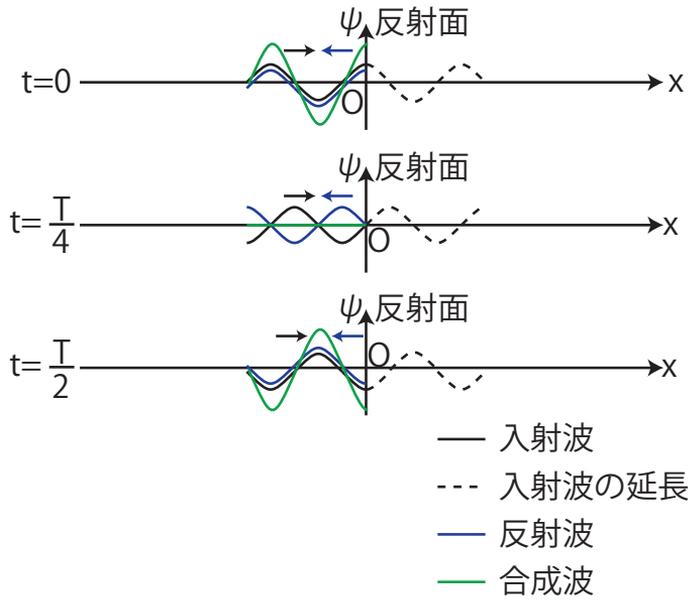


Figure 7.1: 自由端反射

次に，固定端反射について調べてみましょう．固定端を原点にとり，変位 $\psi(t, x)[m]$ について境界条件を表すと次のようになります．

$$\psi(t, x = 0) = 0 \quad (7.2)$$

この (7.2) 式の条件をディリクレ境界条件といいます．ここで， $\psi(t, x)$ を波動一般量に拡張し，逆に波動一般量 $\psi(t, x)$ についてディリクレ境界条件 (7.2) 式が成立するときの反射を固定端反射と定義します． $x < 0$ の方から，固定端に向かって正の向きに進む波動（入射波），

$$\psi_i(t, x) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

が来たときを考えます．波動が固定端に達したとき，負の向きに進む反射波，

$$\psi_r(t, x) = g_1\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

が生じます．波動は重ね合わされて，

$$\psi(t, x) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

の波動一般量になります．ディリクレ境界条件 (7.2) 式より，

$$\psi(t, x = 0) = f_1(t) + g_1(t) = 0$$

$$\therefore g_1(t) = -f_1(t)$$

となります。ここで、変数 $t[s]$ を変数 $\eta[s]$ に置き換えて、

$$g_1(\eta) = -f_1(\eta)$$

となります。故に、反射波は、

$$\begin{aligned} \psi_r(t, x) &= g_1\left(t + \frac{x}{v}\right) \\ &= -f_1\left(t + \frac{x}{v}\right) \end{aligned}$$

となります。つまり、入射波と反射波の関係は、

$$\psi_r(t, x) = -\psi_i(t, -x)$$

です。反射波を求めるためには、媒質が $x > 0$ まで続いているとみなし、入射波を延長して、その入射波の延長の波動一般量を反転し、縦軸に関して折り返せばよいです。連続した正弦波を送り続けた場合を図示します。この場合、入射波と反射波は振幅・波長・周期

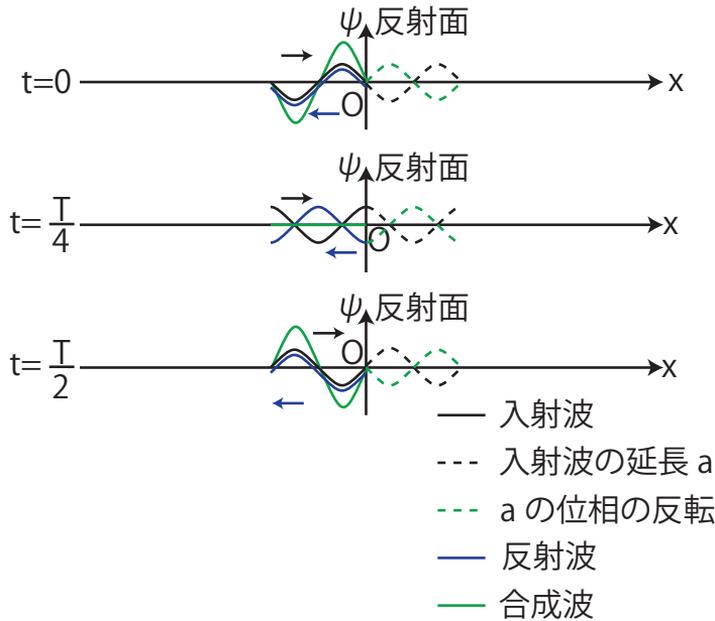


Figure 7.2: 固定端反射

が等しく反対向きに進んでいるので、合成波は定常波になります。また、固定端そのものは定常波の節になります。

波動の反射は媒質の端だけでなく、2つの異なる媒質が接続されている場合にも起こります。このとき、反射だけでなく、透過という現象も起こっています。ここでも1次元の場合を考えます。 $x < 0$ の方から、境界面に向かって正の向きに進む波動（入射波）、

$$\psi_i(t, x) = f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

が来たときを考えます。波動が境界面に達したとき、負の向きに進む反射波,

$$\psi_r(t, x) = g_1\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$$

と, $x > 0$ の領域を正の向きに進む波動 (透過波),

$$\psi_t(t, x) = f_2\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$$

が生じます。ただし, $x < 0$ の媒質を媒質 1, そのときの波動の速さを $v_1[m/s]$ とし, $x > 0$ の媒質を媒質 2, そのときの波動の速さを $v_2[m/s]$ としました。ここで, $\psi(t, x)$ は媒質 1 と媒質 2 の波動について等しくならなければなりません。したがって, 境界条件,

$$\psi_i(t, x = 0) + \psi_r(t, x = 0) = \psi_t(t, x = 0)$$

が成立します。また, 張力の $\psi(t, x)$ 方向への成分は, 媒質 1 と媒質 2 で等しくならなければなりません。したがって, 境界条件,

$$\left[\frac{\partial \psi_i(t, x)}{\partial x}\right]_{x=0} + \left[\frac{\partial \psi_r(t, x)}{\partial x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\partial \psi_t(t, x)}{\partial x}\right]_{x=0}$$

が成立します。これらを次のように書き直します。

$$f_1(t) + g_1(t) = f_2(t) \tag{7.3}$$

$$\left[\frac{\partial f_1(t, x)}{\partial x}\right]_{x=0} + \left[\frac{\partial g_1(t, x)}{\partial x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\partial f_2(t, x)}{\partial x}\right]_{x=0} \tag{7.4}$$

となります。ここで, 変数 $\xi_1[s], \eta_1[s], \xi_2[s]$ を,

$$\xi_1 \equiv t - \frac{x}{v_1}$$

$$\eta_1 \equiv t + \frac{x}{v_1}$$

$$\xi_2 \equiv t - \frac{x}{v_2}$$

と定義すると, (7.4) 式は,

$$-\frac{1}{v_1} \left[\frac{\partial f_1(\xi_1)}{\partial \xi_1}\right]_{x=0} + \frac{1}{v_1} \left[\frac{\partial g_1(\eta_1)}{\partial \eta_1}\right]_{x=0} = -\frac{1}{v_2} \left[\frac{\partial f_2(\xi_2)}{\partial \xi_2}\right]_{x=0}$$

となります。 $x = 0$ では,

$$\xi_1 = \eta_1 = \xi_2 = t$$

なので,

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} \left(\frac{\partial f_1(t)}{\partial t} - \frac{\partial g_1(t)}{\partial t}\right) &= \frac{1}{v_2} \frac{\partial f_2(t)}{\partial t} \\ \therefore \frac{1}{v_1} \{f_1(t) - g_1(t)\} &= \frac{1}{v_2} f_2(t) + C \end{aligned}$$

となりますが, $f_1(t) \equiv 0$ のときは, $g_1(t) = f_2(t) = 0$ となるので, 積分定数 C は 0 になります. 故に,

$$\frac{1}{v_1}\{f_1(t) - g_1(t)\} = \frac{1}{v_2}f_2(t) \quad (7.5)$$

となります. (7.3) 式 $-v_2 \times$ (7.5) 式より,

$$\begin{aligned} \{f_1(t) + g_1(t)\} - \frac{v_2}{v_1}\{f_1(t) - g_1(t)\} &= 0 \\ \therefore \left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right)g_1(t) &= \left(-1 + \frac{v_2}{v_1}\right)f_1(t) \\ \therefore g_1(t) &= -\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}f_1(t) \end{aligned}$$

となります. (7.3) 式 $+v_1 \times$ (7.5) 式より,

$$\begin{aligned} 2f_1(t) &= f_2(t) + \frac{v_1}{v_2}f_2(t) \\ \therefore \frac{v_1 + v_2}{v_2}f_2(t) &= 2f_1(t) \\ \therefore f_2(t) &= \frac{2v_2}{v_1 + v_2}f_1(t) \end{aligned}$$

となります. したがって, 変数 $t[s]$ を $\eta_1[s]$ あるいは $\xi_2[s]$ と置き換えて, 反射波と透過波は, それぞれ次のように表されます.

$$\begin{aligned} g_1\left(t + \frac{x}{v_1}\right) &= -\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}f_1\left(t + \frac{x}{v_1}\right) \\ f_2\left(t - \frac{x}{v_2}\right) &= \frac{2v_2}{v_1 + v_2}f_1\left(t - \frac{x}{v_2}\right) \end{aligned}$$

これらの式から, 反射波・透過波はそれぞれ入射波と同じ波形をもつことがわかります. 反射波は $v_1[m/s]$ と $v_2[m/s]$ の大小関係により, 同位相のときと逆位相のときがありますが, 透過波は常に入射波と同位相になります.

7.2 3次元波動の反射と屈折

3次元波動の反射・屈折を考えます. 媒質の境界面は平面で, そこに正弦波の平面波が入射する場合を取り扱います. 入射波, 反射波, 屈折波の波動一般量をそれぞれ次のように表します.

$$\begin{aligned} \psi_1(t, \vec{x}) &= A \sin(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{x}) \\ \psi'_1(t, \vec{x}) &= B \sin(\omega t - \vec{k}'_1 \cdot \vec{x}) \\ \psi_2(t, \vec{x}) &= C \sin(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{x}) \end{aligned}$$

ここで、 \vec{k} は波数ベクトルで、向きは平面波の進行方向を示します。また、媒質の境界面が xy 面になるように、かつ入射波の進行方向を示す波数ベクトルが xz 平面にあるように座標をとっておきます。状況を図示しておきます。波動一般量 $\psi(t, \vec{x})$ は境界面上では、ど

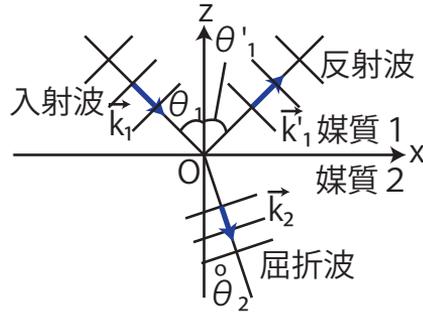


Figure 7.3: 反射と屈折

らの媒質中の波動について考えても等しくならなければなりません。故に、境界面上では、

$$\begin{aligned} \psi_1(t, \vec{x}) + \psi'_1(t, \vec{x}) &= \psi_2(t, \vec{x}) \\ \therefore A \sin(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{x}) + B \sin(\omega t - \vec{k}'_1 \cdot \vec{x}) &= C \sin(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{x}) \end{aligned}$$

が成立しなければなりません。そのためには3つの正弦波の位相が境界面上のすべての点において、常に等しくならなければなりません。

$$\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{x} = \omega t - \vec{k}'_1 \cdot \vec{x} = \omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{x}$$

すなわち、

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{x} = \vec{k}'_1 \cdot \vec{x} = \vec{k}_2 \cdot \vec{x} \quad (7.6)$$

が成立します。(7.6)式は \vec{x} が境界面上にあるとき、すなわち xy 平面内に含まれるときに成立する関係です。故に、

$$\vec{x} = (x, y, 0)$$

です。また、入射波に関しては、進行方向を示す波数ベクトルが xz 平面にあるので、

$$\vec{k}_1 = (k_{1x}, 0, k_{1z})$$

と表されます。反射波と屈折波については、

$$\vec{k}'_1 = (k'_{1x}, k'_{1y}, k'_{1z})$$

$$\vec{k}_2 = (k_{2x}, k_{2y}, k_{2z})$$

と扱います。このとき、(7.6) 式は次のようになります。

$$k_{1x}x = k'_{1x}x + k'_{1y}y = k_{2x}x + k_{2y}y$$

ここで、 $\vec{x} = (x, y, 0)$ は境界面上の全ての点なので、上式が $x[m]$ と $y[m]$ の値に依らずに成立するためには、

$$k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x} \quad (7.7)$$

$$k'_{1y} = k_{2y} = 0 \quad (7.8)$$

が成り立たなければなりません。(7.8) 式より、反射波・屈折波の進行方向を示す波数ベクトルは xz 平面内にあることがわかりました。また、媒質 1 と媒質 2 における波動の速さを、 $v_1[m/s]$, $v_2[m/s]$ とおくと、

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1}$$

$$k'_1 = \frac{\omega}{v_1}$$

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

の関係があるので、(7.7) 式より、

$$\begin{aligned} k_1 \sin \theta_1 &= k'_1 \sin \theta'_1 = k_2 \sin \theta_2 \\ \therefore \frac{\omega}{v_1} \sin \theta_1 &= \frac{\omega}{v_1} \sin \theta'_1 = \frac{\omega}{v_2} \sin \theta_2 \\ \therefore \frac{\sin \theta_1}{v_1} &= \frac{\sin \theta'_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} \end{aligned}$$

となります。故に、

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta'_1 \\ \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} &= \frac{v_1}{v_2} \equiv n_{1 \rightarrow 2} \end{aligned}$$

が成立します。それぞれの式は反射の法則、屈折の法則ですね。また、媒質 1 の速さ $v_1[m/s]$ と媒質 2 の速さ $v_2[m/s]$ の比を屈折率として定義し、 $n_{1 \rightarrow 2}$ と表しています。なお、境界面上で波動は連続でなければならないので、媒質 1 と媒質 2 での振動数は同じになります。

7.3 ホイヘンスの原理

波面の進み方は、次のホイヘンスの原理によって説明されます。

- “1つの波面上の全ての点は、それらを波源とする球面波（素元波）を発生させます。素元波は、波動の進む速さと等しい速さで広がり、これらの素元波が重ね合わされて、共通に接する面が次の瞬間の波面になります。”

平面波と球面波が進む現象のホイヘンスの原理による説明の図を示します。図の青い球面

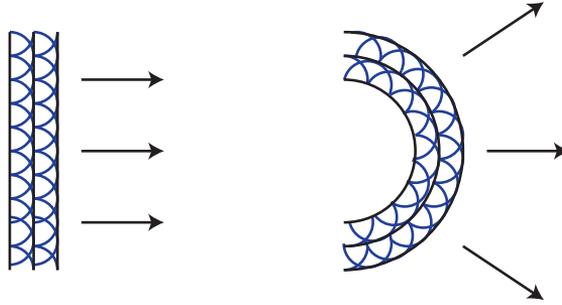


Figure 7.4: ホイヘンスの原理

状の波が素元波です。ここで、素元波はただ単に波面の進み方を説明するための仮想的な波動なのか、あるいは実在する波動なのかという問題が生じます。これについては、次の事例を考えるとよいです。池に石を投げ込むと同心円状の球面波ができます。つまり、ある点で振動すると、必ず球面波ができるのです。平面波にしても、球面波にしても、その波面上の各点は振動しています。したがって、各点から球面波（素元波）が実際に生じているのです。そして、その素元波が重ね合わされて、新しい波面ができるのです。

ホイヘンスの原理により反射・屈折といった現象を説明しましょう。まず、反射の状況を図示します。図の $\theta_1[\text{rad}]$ を入射角といい、 $\theta'_1[\text{rad}]$ を反射角といいます。線分 AB は入

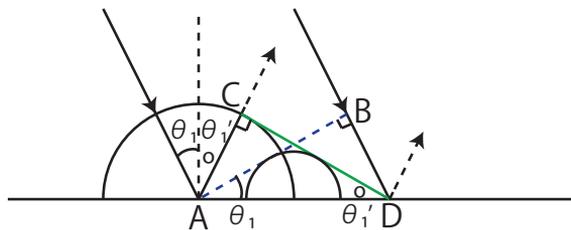


Figure 7.5: 反射の法則

射波面の中の点 A を含む波面です。半円はホイヘンスの原理の素元波です。素元波は反射面から無数に出ていますが、その中の2つだけ描きました。素元波の共通接線の DC が点 D を通る反射波面です。ここで、三角形 ABD と三角形 DCA が合同であることを証明しましょう。波動の進行方向と波面は直交するので、

$$\angle ABD = \angle DCA = 90^\circ$$

です。線分 AD は共通しているので、

$$AD = DA$$

また、入射波の点 B が点 D に進む時間を $t[s]$ とすると、その $t[s]$ の間に反射波の点 A は点 C まで進みます。故に、波動の速さを $v[m/s]$ として、

$$BD = CA(= vt)$$

したがって、三角形の合同が証明されました。よって、

$$\angle BAD = \angle CDA$$

$$\therefore \theta_1 = \theta'_1$$

です。これは、反射の法則です。

次に、ホイヘンスの原理により、屈折の現象を説明します。媒質 1 から媒質 2 へ平面波が進行する状況を図示します。図の $\theta_1[rad]$ を入射角、 $\theta_2[rad]$ を屈折角といいます。線分

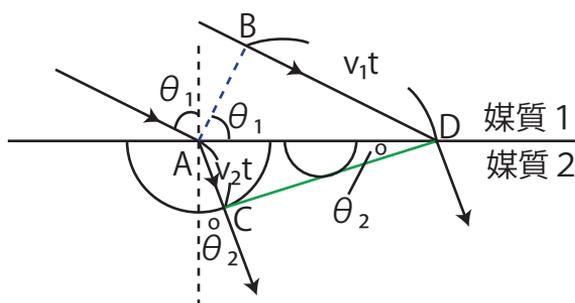


Figure 7.6: 屈折の法則

AB は入射波面の中の点 A を含む波面です。半円はホイヘンスの原理の素元波です。素元波は境界面から無数に出ていますが、その中の 2 つだけ描きました。素元波の共通接線の CD が点 D を通る屈折波面です。入射波の点 B が点 D に進む時間 $t[s]$ の間、点 A に到着した波動は屈折波として点 C まで進みます。波動が屈折するのは、媒質によって波動の速さが変わるためであることが理解されますね。ここで、入射角の正弦と屈折角の正弦の比

を計算してみます.

$$\begin{aligned}\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} &= \frac{BD}{AD} \\ &= \frac{BD}{AC} \\ &= \frac{v_1 t}{v_2 t} \\ &= \frac{v_1}{v_2}\end{aligned}$$

したがって、速さの比を屈折率 $n_{1 \rightarrow 2}$ として定義すると、次の屈折の法則が成立します.

$$n_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

なお、境界面上で波動は連続でなければならないので、媒質 1 と媒質 2 での振動数は同じです.

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>