J Simplicity 場の量子論

Preface

　場の量子論は，特殊相対性理論と量子力学を融合した素粒子の基礎理論です．

Contents

Part1 古典場と自由量子場

QFT01 場の古典論

QFT01-1 自然単位系と特殊相対論的 Notation

　素粒子論で使用する単位系は,

$$\hbar = c = 1$$

とする自然単位系を採用します．言うまでもなく，$\hbar$はプランク定数を 2π で割ったもの，c は光速です.

　場の量子論は，特殊相対性理論と量子力学を融合し，場という概念を推し進めた理論ですが，ここで，特殊相対性理論の表記についてまとめておきます．まず，計量テンソルは,

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とします．また，ギリシア文字は$\mu = 0,1,2,3$のようにとります．第０成分は時間成分，第１，２，３成分は空間成分です．座標ベクトルは,

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x})$$

$$x_{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\nu} = (t, -\vec{x})$$

です．上付き添え字は反変ベクトル，下付き添え字は共変ベクトルです．また，上下に同じギリシア文字が対になって現れる場合，0,1,2,3 について和をとるというアインシュタインの規約を使います．ローレンツ変換は,

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

において，インターバルの２乗が不変であるという条件，

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} x^{\rho} x^{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} x^{\rho} x^{\sigma}$$

すなわち，

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$$

を満たす変換を言います．また，縮約をとったスカラー，すなわちローレンツ不変量の例としては，インターバルの２乗の他に，

$$px = \eta_{\mu\nu} p^{\mu} x^{\nu} = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

$$p^2 = p^{\mu} p_{\mu} = E^2 - |\vec{p}|^2 = \omega^2 - \left|\vec{k}\right|^2 = m^2$$

等があります．（式の変形には$\hbar = 1$とした，アインシュタイン-ド・ブロイの関係式を使っています．）また微分演算子として，

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$$

$$\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = (\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$$

があります．縮約をとると，

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

となります．

QFT01-2 Lagrangian 形式

　場という量を一般的に，

$$\phi(x)$$

と表しておきます．ここで，x は時間 1 次元と空間 3 次元をまとめて表しています．

$$x \equiv x^{\mu} = (t, \vec{x})$$

つまり，場という量は空間の関数になっていて，それが時間的に変動するものであると考えることができます．

　場を Lagrangian 形式の解析力学で取り扱ってみましょう. Lagrangian の L を Lagrangian 密度$\mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi)$で表す場合, 空間 3 次元について積分して，

$$L = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi)\, d^3x$$

となります．（$d^3x = dxdydz.$）さらに，Lagrangian を時間で積分した量を作用 S といいます．

$$S = \int L\, dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi)\, d^4x$$

（$d^4x = dtdxdydz.$）

ここで，ある領域Ωに対して，場φを，

$$\phi(x) \to \phi(x) + \delta\phi(x)$$

となるように，変化させます．ただし，領域の境界で，

$$\delta\phi(x) = 0 \ (\mathrm{Boundary})$$

が成立するものとします．場φが上述のように変わるとき，作用 S は，

$$S \to S + \delta S$$

と表記されますが，

$$\delta S = 0$$

となることを自然は要求します．言い直すと，作用 S を最小にするように自然はできているのです．この原理を最小作用の原理と言います．ここで，左辺を次のように計算します．

$$\delta S = \int d^4x \{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta(\partial_\mu \phi)\}$$

$$= \int d^4x \{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(\delta\phi)\}$$

ここで，右辺第２項は，

$$\int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) = \int d^4x \{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_0(\delta\phi) + \cdots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 \phi)} \partial_3(\delta\phi)\}$$

$$= \int d^4x \{\partial_0(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \delta\phi) - \partial_0(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)})\delta\phi + \cdots + \partial_3(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 \phi)} \delta\phi) - \partial_3(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 \phi)})\delta\phi\}$$

$$= \int dx^1 dx^2 dx^3 \, [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \delta\phi]_{\mathrm{Boundary}} + \cdots + \int dx^0 dx^1 dx^2 \, [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 \phi)} \delta\phi]_{\mathrm{Boundary}} - \int d^4x \, \partial_\mu(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)})\delta\phi$$

$$= 0 - \int d^4x \, \partial_\mu(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)})\delta\phi$$

最後の変形には境界面において，

$$\delta\phi = 0$$

であることを使いました．よって，

$$\delta S = \int d^4x \{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)})\delta\phi\}$$

$$= \int d^4x \{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)})\}\delta\phi = 0$$

となります．任意の$\delta\varphi$について，この式が成立するためには，被積分が 0 にならなければなりません．故に，

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0$$

が成立します．この場の方程式を Euler-Lagrange 方程式と言います．

　次に，Hamiltonian について見ておきます．通常の解析力学を場について拡張した議論を行います．まず，場の共役運動量密度πを，

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}$$

で定義します．更に，Hamiltonian 密度$\mathcal{H}$を定義します．

$$\mathcal{H}(x) \equiv \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

この Hamiltonian 密度から，Hamiltonian H が計算されます．

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H}(x)$$

QFT02 Klein-Gordon 場（Scalar 場）

QFT02-1 実 Klein-Gordon 場の古典論

　特殊相対論的量子力学の方程式である Klein-Gordon 方程式は，次の式で与えられます．

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0$$

ここで，

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} + \nabla\cdot(-\nabla) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

であり，m は質量です．また，φ(x)は一成分のみの波動場で，ローレンツ変換，

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

について，

$$\phi(x) \to \phi'(x')$$

と変換されるとすれば，ローレンツ変換の下で Klein-Gordon 方程式は，

$$(\partial'_\mu \partial'^\mu + m^2)\phi'(x') = 0$$

となります．ここで，$\partial_\mu \partial^\mu$はローレンツ不変量であり，

$$\partial'_\mu \partial'^\mu = \partial_\mu \partial^\mu$$

が成立するので，

$$(\partial_{\mu}\partial^{\mu}+m^2)\phi'(x')=0$$

となります．$\phi'(x')$は，$\phi(x)$と全く同形の方程式を満たすことが要求されるので，φのローレンツ変換性は，

$$\phi'(x')=\phi(x)$$

となります．この変換性はスカラーなので，φはスカラー場とも呼ばれます．

φ(x)が実数の場合，つまり実 Klein-Gordon 場の場合，対応する Lagrangian 密度は，

$$\mathcal{L}(x)=\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi(x)\,\partial^{\mu}\phi(x)-\frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$$

となります．この Lagrangian 密度を Euler-Lagrange 方程式，

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_{\mu}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)})=0$$

に代入すると，確かに Klein-Gordon 方程式が導出されることを確認しておきましょう．まず，第１項は，

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=-\frac{1}{2}m^2\cdot 2\phi$$

$$= -m^2\phi$$

となります．第２項を計算するため，Lagrangian 密度を，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}\,\partial_\rho\phi(x)\,\partial_\sigma\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$$

と変形しておきます．μやνをρやσに置き換えても，Einstein の規約によりそれぞれ和をとることになりますので，問題ありません．このとき，

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\,\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}\eta^{\nu\mu}\,\partial_\nu\phi$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\,\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\,\partial_\nu\phi$$

$$= \partial^\mu\phi$$

となります．１行目から２行目への変形には$\eta^{\nu\mu} = \eta^{\mu\nu}$を使いました．２行目から３行目への変形は，$\eta^{\mu\nu}$によって，添え字を上に上げたのですね．したがって，Euler-Lagrange 方程式は，

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = -m^2\phi - \partial_\mu\,\partial^\mu\phi = 0$$

$$\therefore\ (\partial_\mu\,\partial^\mu + m^2)\phi = 0$$

となります．確かに，Klein-Gordon 方程式が導かれました．

　Hamiltonian 密度も求めておきましょう．一般化運動量πは，

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi}$$

$$= \dot{\phi}$$

となります．したがって，Hamiltonian 密度は，

$$\mathcal{H}(x) = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x)$$

$$= \pi(x)\pi(x) - \{\frac{1}{2}\partial_\mu \phi(x)\,\partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)\}$$

$$= \pi^2 - [\frac{1}{2}\{(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2 - (\nabla\phi)^2\} - \frac{1}{2}m^2\phi^2]$$

$$= \frac{1}{2}[\pi^2(x) + \{\nabla\phi(x)\}^2 + m^2\phi^2(x)]$$

と導かれます．

QFT02-2 複素 Klein-Gordon 場の古典論

Klein-Gordon 場φ(x)が複素数の場合，つまり複素 Klein-Gordon 場の場合は，独立な場は$\phi(x)$とこれにエルミート共役な関係にある場$\phi^+(x)$の２種類となり，それぞれ Klein-Gordon 方程式を満たします．このとき，Lagrangian 密度は，

$$\mathcal{L}(x) = \partial_\mu \phi(x)\,\partial^\mu \phi^+(x) - m^2\phi^+(x)\phi(x)$$

になります．確かに，この Lagrangian 密度から Euler-Lagrange 方程式により，複素 Klein-Gordon 方程式が導出されることを確認しましょう．

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}) = 0$$

の第１項は,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^+$$

となります．また,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi^+$$

となります．このとき，Euler-Lagrange 方程式は,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}) = -m^2 \phi^+ - \partial_\mu \partial^\mu \phi^+ = 0$$

$$\therefore \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi^+(x) = 0$$

となり，エルミート共役をとった Klein-Gordon 方程式が導かれます．次にエルミート共役をとっていないφ(x)についての関係を導くには, このエルミート共役をとった Klein-Gordon 方程式について，さらに両辺エルミート共役をとります．このとき,

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi(x) = 0$$

が成立します. 以上で, 複素 Klein-Gordon 方程式が計 2 式導かれました.

Hamiltonian 密度も求めておきましょう. まず, ϕ, ϕ^+に共役な一般化運動量π, π^+は,

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \dot{\phi}}$$

$$= \dot{\phi}^+(x)$$

$$\pi^+(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \dot{\phi}^+}$$

$$= \dot{\phi}(x)$$

となります. したがって, Hamiltonian 密度は,

$$\mathcal{H}(x) = \pi(x)\dot{\phi}(x) + \pi^+(x)\dot{\phi}^+(x) - \mathcal{L}(x)$$

$$= 2\pi^+(x)\pi(x) - \{\partial_\mu \phi(x)\, \partial^\mu \phi^+(x) - m^2 \phi^+(x)\phi(x)\}$$

$$= 2\pi^+\pi - \{\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial \phi^+}{\partial t} - (\nabla\phi)(\nabla\phi^+) - m^2\phi^+\phi\}$$

$$= \pi^+(x)\pi(x) + \{\nabla\phi^+(x)\}\{\nabla\phi(x)\} + m^2\phi^+(x)\phi(x)$$

となります.

QFT02-3 実 Klein-Gordon 場の正準量子化

量子論ではオブザーバブルは演算子で表されることになります. 実

Klein-Gordon 場φを演算子に格上げした瞬間に, 場の量子化が実行されたことになります．この際，演算子は積の順序が問題となりますので，交換関係を設定することになります．このような交換関係による量子化のことを正準量子化といいます．量子力学での位置演算子と運動量演算子の間の交換関係,

$$[\hat{x},\hat{p}_x]=[\hat{y},\hat{p}_y]=[\hat{z},\hat{p}_z]=i\hbar$$

$$[\hat{x},\hat{p}_y]=[\hat{x},\hat{p}_z]=[\hat{y},\hat{p}_x]=[\hat{y},\hat{p}_z]=[\hat{z},\hat{p}_x]=[\hat{z},\hat{p}_y]=0$$

$$[\hat{x},\hat{x}]=[\hat{y},\hat{y}]=[\hat{z},\hat{z}]=[\hat{p}_x,\hat{p}_x]=[\hat{p}_y,\hat{p}_y]=[\hat{p}_z,\hat{p}_z]=0$$

$$[\hat{x},\hat{y}]=[\hat{y},\hat{z}]=[\hat{z},\hat{x}]=[\hat{p}_x,\hat{p}_y]=[\hat{p}_y,\hat{p}_z]=[\hat{p}_z,\hat{p}_x]=0$$

を参考にして, 実 Klein-Gordon 場φとその一般化運動量πの間に次の同時刻交換関係を設定します.

$$\begin{cases}[\phi(t,\vec{x}),\pi(t,\vec{x}')]=i\delta(\vec{x}-\vec{x}')\\ [\phi(t,\vec{x}),\phi(t,\vec{x}')]=[\pi(t,\vec{x}),\pi(t,\vec{x}')]=0\end{cases}\quad(1)$$

演算子を表すハットは省略しました．また，場の量φやπは連続量なので，δ関数を使って交換関係を表しています.

次に，場φを Fourier 変換します.

$$\phi(x)=\int\frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}[a(\vec{k})\exp(-ikx)+a^+(\vec{k})\exp(ikx)]\ (2)$$

単に x や k と書いているのは,

$$x = x^{\mu} = (t, \vec{x})$$

$$p = p^{\mu} = (E, \vec{p}) = k = k^{\mu} = (\omega, \vec{k})$$

を意味します．したがって，kx の表記で，

$$kx = \eta_{\mu\nu} k^{\mu} x^{\nu} = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

を表します．また，ωと$\vec{k}$の間には，特殊相対性理論の要請より，

$$p^2 = p^{\mu} p_{\mu} = E^2 - |\vec{p}|^2 = k^2 = k^{\mu} k_{\mu} = \omega^2 - \left|\vec{k}\right|^2 = m^2$$

の関係が成立します．これを，On-shell 条件といいます．このとき，

$$\omega = \sqrt{\left|\vec{k}\right|^2 + m^2}$$

となります．場φを Fourier 変換した式には，第２項が付いています．これは，φが実の場，つまり，エルミートの場であることを満たすために付け加えられたものです．確かに，(2)式より，

$$\phi^{+}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \left[a^{+}\left(\vec{k}\right) \exp(ikx) + a\left(\vec{k}\right) \exp(-ikx)\right]$$

$$= \phi(x)$$

となります．ここで，展開係数a, a^{+}はエルミート演算子で，次の交換関係が成立します．

$$\begin{cases} \left[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')\right] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ \left[a(\vec{k}), a(\vec{k}')\right] = \left[a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')\right] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

交換関係(3)式が成立することを確認するために, 場φを Fourier 変換した(2)式をもとの同時刻交換関係(1)式の左辺に代入して，(3)式を使って(1)式が成立することを確かめます.

$$[\phi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{x}')] = \left[\phi(t,\vec{x}), \dot{\phi}(t,\vec{x}')\right]$$

$$= [\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}[a(\vec{k})\exp(-ikx) + a^+(\vec{k})\exp(ikx)], \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}}[a(\vec{k}')\exp(-ik'x') + a^+(\vec{k}')\exp(ik'x')]$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} [a\left(\vec{k}\right) \exp\left\{-i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)\right\} + a^+\left(\vec{k}\right) \exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)\right\}, -i\omega' a(\vec{k}')\exp\{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\} + i\omega' a^+(\vec{k}')\exp\{i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\}]$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} \{i\omega'\left[a\left(\vec{k}\right), a^+\left(\vec{k}'\right)\right] \exp\left\{-i\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}\right)\right\} \exp\{i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\} - i\omega'[a^+(\vec{k}), a(\vec{k}')] \exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}\right)\right\} \exp\{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\}\}$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} \{i\omega' \delta(\vec{k} - \vec{k}') \exp\{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})\} \exp\{i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\} - i\omega'\{-\delta(\vec{k} - \vec{k}')\} \exp\{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})\} \exp\{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\}\}$$

（$\vec{k} = \vec{k}'$に加え，$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$より，$\omega = \omega'$も成立します．）

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} [\, i\omega \exp\{i\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{x}')\} + i\omega \exp\{-i\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{x}')\}]$$

（$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dk$の１次元の式より，３次元にして，
$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) d^3\vec{k}$が成立します．）

$$= \frac{1}{2\omega} 2i\omega\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$= i\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

同様にして，(1)式の残りの２式も確かめることができます．

Hamiltonian を展開係数a, a^+で表してみましょう．Hamiltonian は，

$$H = \int d^3 x \mathcal{H}$$

$$= \int d^3 x \frac{1}{2} [\pi^2(x) + \{\nabla\phi(x)\}^2 + m^2\phi^2(x)]$$

です．ここで，

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [a(\vec{k})\exp(-ikx) + a^+(\vec{k})\exp(ikx)] \ (2)$$

でしたが,

$$kx = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

より,

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (-i\omega)[a(\vec{k})\exp(-ikx) - a^+(\vec{k})\exp(ikx)]$$

$$\nabla\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (i\vec{k})[a(\vec{k})\exp(-ikx) - a^+(\vec{k})\exp(ikx)]$$

となります. 上の Hamiltonian に代入して計算します.

$$H = \int d^3 x \frac{1}{2} [\pi^2(x) + \{\nabla\phi(x)\}^2 + m^2\phi^2(x)]$$

$$= \int d^3 x \frac{1}{2} [\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (-i\omega)[a(\vec{k})\exp(-ikx) - a^+(\vec{k})\exp(ikx)] \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} (-i\omega')[a(\vec{k}')\exp(-ik'x) - a^+(\vec{k}')\exp(ik'x)]$$

$$+\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}(i\vec{k})[a(\vec{k})\exp(-ikx)$$

$$-a^+(\vec{k})\exp(ikx)]\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}}(i\vec{k}')[a(\vec{k}')\exp(-ik'x)$$

$$-a^+(\vec{k}')\exp(ik'x)]$$

$$+m^2\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}[a(\vec{k})\exp(-ikx)$$

$$+a^+(\vec{k})\exp(ikx)]\int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}}[a(\vec{k}')\exp(-ik'x)$$

$$+a^+(\vec{k}')\exp(ik'x)]]$$

$$=\frac{1}{2}[\int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega\omega'}}\int d^3x(-\omega\omega')[a(\vec{k})a(\vec{k}')\exp\{-i(k+k')x\}$$

$$-a(\vec{k})a^+(\vec{k}')\exp\{-i(k-k')x\}$$

$$-a^+(\vec{k})a(\vec{k}')\exp\{i(k-k')x\}$$

$$+a^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')\exp\{i(k+k')x\}]$$

$$+\int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega\omega'}}\int d^3x(-\vec{k}$$

$$\cdot\vec{k}')[a(\vec{k})a(\vec{k}')\exp\{-i(k+k')x\}$$

$$-a(\vec{k})a^+(\vec{k}')\exp\{-i(k-k')x\}$$

$$-a^+(\vec{k})a(\vec{k}')\exp\{i(k-k')x\}$$

$$+a^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')\exp\{i(k+k')x\}]$$

$$+m^2\int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega\omega'}}\int d^3x[a(\vec{k})a(\vec{k}')\exp\{-i(k+k')x\}$$

$$+a(\vec{k})a^+(\vec{k}')\exp\{-i(k-k')x\}$$

$$+a^+(\vec{k})a(\vec{k}')\exp\{i(k-k')x\}$$

$$+a^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')\exp\{i(k+k')x\}]]$$

（$\delta(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ikx)dx$の１次元の式より，３次元にして，

$\delta(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})d^3\vec{x}$が成立します．）

$$= \frac{1}{2}[\int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{2\sqrt{\omega\omega'}}(-\omega\omega' - \vec{k}\cdot\vec{k}')[a(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k} + \vec{k}')\exp\{-i(\omega+\omega')t\} - a(\vec{k})\,a^+(\vec{k}')\delta(\vec{k} - \vec{k}')\exp\{-i(\omega-\omega')t\} - a^+(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k} - \vec{k}')\exp\{i(\omega-\omega')t\} + a^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')\delta(\vec{k} + \vec{k}')\exp\{i(\omega+\omega')t\}]$$

$$+m^2\int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{2\sqrt{\omega\omega'}}[a(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k}+\vec{k}')\exp\{-i(\omega+\omega')t\} + a(\vec{k})\,a^+(\vec{k}')\delta(\vec{k}-\vec{k}')\exp\{-i(\omega-\omega')t\} + a^+(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k}-\vec{k}')\exp\{i(\omega-\omega')t\} + a^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')\delta(\vec{k}+\vec{k}')\exp\{i(\omega+\omega')t\}]]$$

（$\vec{k} = \pm\vec{k}'$に加え，$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$より，$\omega = \omega'$が成立します．）

$$= \frac{1}{2}[\int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[(-\omega^2 + |\vec{k}|^2)a(\vec{k})a(-\vec{k})\exp(-2i\omega t) - \left(-\omega^2 - |\vec{k}|^2\right)a(\vec{k})\,a^+(\vec{k}) - (-\omega^2 - |\vec{k}|^2)a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + (-\omega^2 + |\vec{k}|^2)a^+(\vec{k})a^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)]$$

$$+m^2\int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[a(\vec{k})a(-\vec{k})\exp(-2i\omega t) + a(\vec{k})\,a^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)]]$$

$$= \frac{1}{2}[\int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[-m^2 a(\vec{k})a(-\vec{k})\exp(-2i\omega t) + (2\omega^2 - m^2)a(\vec{k})\,a^+(\vec{k}) + (2\omega^2 - m^2)a^+(\vec{k})a(\vec{k}) - m^2 a^+(\vec{k})a^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)]$$

$$+m^2\int\frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[a(\vec{k})a(-\vec{k})\exp(-2i\omega t)+a(\vec{k})\,a^+(\vec{k})+a^+(\vec{k})a(\vec{k})$$
$$+a^+(\vec{k})a^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)]]$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[2\omega^2\{a(\vec{k})a^+(\vec{k})+a^+(\vec{k})a(\vec{k})\}]$$

$$=\frac{1}{2}\int d^3\vec{k}\,\omega[\{a^+(\vec{k})a(\vec{k})+\delta(0)\}+a^+(\vec{k})a(\vec{k})]$$

$$=\int d^3\vec{k}\,\omega a^+(\vec{k})a(\vec{k})+\frac{1}{2}\int d^3\vec{k}\,\omega\delta(0)$$

ここで，第２項はデルタ関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\vec{k})\delta\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)dx=f(\vec{k}')$$

より，$\vec{k}=0$のときのωの値が出てくることになります．

$$\frac{1}{2}\int d^3\vec{k}\,\omega\delta(0)=\frac{1}{2}\int d^3\vec{k}\sqrt{\left|\vec{k}\right|^2+m^2}\delta(0)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+m^2}$$

$$=\frac{1}{2}m$$

これは定数なので，エネルギー軸の原点をずらして 0 にすることができます．したがって，Hamiltonian は,

$$H = \int d^3\vec{k}\, \omega a^+(\vec{k}) a(\vec{k})$$

で与えられることになります．

QFT02-4 複素 Klein-Gordon 場の正準量子化

実 Klein-Gordon 場の場合と同様に，複素 Klein-Gordon 場φとその一般化運動量πの間に次の同時刻交換関係を設定し量子化します．ただし，$\pi(x) = \dot{\phi}^+(x)$と$\pi^+(x) = \dot{\phi}(x)$の関係がありました．

$$\begin{cases} [\phi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{x}')] = [\phi^+(t,\vec{x}), \pi^+(t,\vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{x}')] = [\phi(t,\vec{x}), \phi^+(t,\vec{x}')] = [\pi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{x}')] \\ \quad = [\pi(t,\vec{x}), \pi^+(t,\vec{x}')] = [\phi(t,\vec{x}), \pi^+(t,\vec{x}')] = 0 \end{cases} \quad (4)$$

演算子を表すハットは省略しています．また，場の量φやπは連続量なので，δ関数を使って交換関係を表しています．

次に，場φを Fourier 変換します．

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [a(\vec{k})\exp(-ikx) + b^+(\vec{k})\exp(ikx)] \quad (5)$$

この式のエルミート共役をとると，

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [b(\vec{k})\exp(-ikx) + a^+(\vec{k})\exp(ikx)]$$

です．演算子 b が導入されましたので，φは実の場ではないことがわかります．ここで，展開係数a, a^+, b, b^+はエルミート演算子で，次の交換関係が

成立します.

$$\begin{cases} \left[a(\vec{k}), a^{+}(\vec{k}')\right] = \left[b(\vec{k}), b^{+}(\vec{k}')\right] = \delta(\vec{k}-\vec{k}') \\ \left[a(\vec{k}), a(\vec{k}')\right] = \left[a^{+}(\vec{k}), a^{+}(\vec{k}')\right] = \left[b(\vec{k}), b(\vec{k}')\right] \\ \quad = \left[b^{+}(\vec{k}), b^{+}(\vec{k}')\right] = \left[a^{+}(\vec{k}), b(\vec{k}')\right] = 0 \end{cases} \quad (6)$$

交換関係(6)式が成立することを確認するために, 場φを Fourier 変換した(5)式をもとの同時刻交換関係(4)式の左辺に代入して, (6)式を使って(5)式が成立することを確かめます.

$$[\phi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{x}')] = \left[\phi(t,\vec{x}), \dot{\phi}^{+}(t,\vec{x}')\right]$$

$$= [\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}[a(\vec{k})\exp(-ikx) + b^{+}(\vec{k})\exp(ikx)], \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}[b(\vec{k})\exp(-ikx) + a^{+}(\vec{k})\exp(ikx)]]$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}}[a(\vec{k})\exp\{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})\} + b^{+}(\vec{k})\exp\{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})\}, -i\omega' b(\vec{k}')\exp\{-i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\} + i\omega' a^{+}(\vec{k}')\exp\{i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\}]$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}}\{i\omega'\left[a(\vec{k}), a^{+}(\vec{k}')\right]\exp\{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})\}\exp\{i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\} - i\omega'[b^{+}(\vec{k}), b(\vec{k}')]\exp\{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})\}\exp\{-i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\}\}$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} \{i\omega'\delta(\vec{k} - \vec{k}') \exp\{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})\} \exp\{i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\} - i\omega'\{-\delta(\vec{k} - \vec{k}')\} \exp\{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})\} \exp\{-i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\}\}$$

最後の式は，前 Section の実 Klein-Gordon 場の交換関係についての途中の計算式と全く同じです．したがって，以下，同じ計算により，

$$[\phi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

が導出されます．同様にして，(4)式の残りの全ての式も確かめることができます．

Hamiltonian を展開係数a, a^+, b, b^+で表してみましょう．Hamiltonian は，

$$H = \int d^3x \mathcal{H}$$

$$= \int d^3x [\pi^+(x)\pi(x) + \{\nabla\phi^+(x)\}\{\nabla\phi(x)\} + m^2\phi^+(x)\phi(x)]$$

です．ここで，

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [a(\vec{k})\exp(-ikx) + b^+(\vec{k})\exp(ikx)] \quad (5)$$

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [b(\vec{k})\exp(-ikx) + a^+(\vec{k})\exp(ikx)]$$

でしたが,

$$kx = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}$$

より,

$$\pi(x) = \dot{\phi}^+(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (-i\omega)[b(\vec{k})\exp(-ikx) - a^+(\vec{k})\exp(ikx)]$$

$$\nabla\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (i\vec{k})[a(\vec{k})\exp(-ikx) - b^+(\vec{k})\exp(ikx)]$$

となります．上の Hamiltonian に代入して計算します．

$$H = \int d^3 x[\pi^+(x)\pi(x) + \{\nabla\phi^+(x)\}\{\nabla\phi(x)\} + m^2\phi^+(x)\phi(x)]$$

$$= \int d^3 x[\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (i\omega)[-a(\vec{k})\exp(-ikx) + b^+(\vec{k})\exp(ikx)] \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} (-i\omega')[b(\vec{k}')\exp(-ik'x) - a^+(\vec{k}')\exp(ik'x)] + m^2\phi^+(x)\phi(x)]$$

$$+ \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (-i\vec{k})[-b(\vec{k})\exp(-ikx) + a^+(\vec{k})\exp(ikx)] \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} (i\vec{k}')[a(\vec{k}')\exp(-ik'x) - b^+(\vec{k}')\exp(ik'x)]$$

$$+m^2\int\frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}[b(\vec{k})\exp(-ikx)$$

$$+a^+(\vec{k})\exp(ikx)]\int\frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}}[a(\vec{k}')\exp(-ik'x)$$

$$+b^+(\vec{k}')\exp(ik'x)]]$$

$$=\int\frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega 2\omega'}}\int d^3x(\omega\omega')[-a(\vec{k})b(\vec{k}')\exp\{-i(k+k')x\}$$

$$+a(\vec{k})a^+(\vec{k}')\exp\{-i(k-k')x\}$$

$$+b^+(\vec{k})b(\vec{k}')\exp\{i(k-k')x\}$$

$$-b^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')\exp\{i(k+k')x\}]$$

$$+\int\frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega 2\omega'}}\int d^3x(\vec{k}\cdot\vec{k}')[-b(\vec{k})a(\vec{k}')\exp\{-i(k+k')x\}$$

$$+b(\vec{k})b^+(\vec{k}')\exp\{-i(k-k')x\}$$

$$+a^+(\vec{k})a(\vec{k}')\exp\{i(k-k')x\}$$

$$-a^+(\vec{k})b^+(\vec{k}')\exp\{i(k+k')x\}]$$

$$+m^2\int\frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega 2\omega'}}\int d^3x[b(\vec{k})a(\vec{k}')\exp\{-i(k+k')x\}$$

$$+b(\vec{k})b^+(\vec{k}')\exp\{-i(k-k')x\}$$

$$+a^+(\vec{k})a(\vec{k}')\exp\{i(k-k')x\}$$

$$+a^+(\vec{k})b^+(\vec{k}')\exp\{i(k+k')x\}]$$

（$\delta(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ikx)dx$の１次元の式より，３次元にして，
$\delta(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})d^3\vec{x}$が成立します．）

$$
\begin{aligned}
=\int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{\sqrt{2\omega 2\omega'}}(\omega\omega')[&-a(\vec{k})b(\vec{k}')\delta(\vec{k}+\vec{k}')\exp\{-i(\omega+\omega')t\} \\
&+a(\vec{k})a^+(\vec{k}')\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')\exp\{-i(\omega-\omega')t\} \\
&+b^+(\vec{k})b(\vec{k}')\delta(\vec{k}-\vec{k}')\exp\{i(\omega-\omega')t\} \\
&-b^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')\,\delta(\vec{k}+\vec{k}')\exp\{i(\omega+\omega')t\}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+\int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{\sqrt{2\omega 2\omega'}}(\vec{k}\cdot\vec{k}')[&-b(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k}+\vec{k}')\exp\{-i(\omega+\omega')t\} \\
&+b(\vec{k})b^+(\vec{k}')\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')\exp\{-i(\omega-\omega')t\} \\
&+a^+(\vec{k})a(\vec{k}')\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')\exp\{i(\omega-\omega')t\} \\
&-a^+(\vec{k})b^+(\vec{k}')\delta(\vec{k}+\vec{k}')\exp\{i(\omega+\omega')t\}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+m^2\int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{\sqrt{2\omega 2\omega'}}[&b(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k}+\vec{k}')\exp\{-i(\omega+\omega')t\} \\
&+b(\vec{k})b^+(\vec{k}')\delta(\vec{k}-\vec{k}')\exp\{-i(\omega-\omega')t\} \\
&+a^+(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k}-\vec{k}')\exp\{i(\omega-\omega')t\} \\
&+a^+(\vec{k})b^+(\vec{k}')\delta(\vec{k}+\vec{k}')\exp\{i(\omega+\omega')t\}]
\end{aligned}
$$

（$\vec{k}=\pm\vec{k}'$に加え，$\omega_{\vec{k}}=\sqrt{\left|\vec{k}\right|^2+m^2}$より，$\omega=\omega'$が成立します.）

$$
\begin{aligned}
=\int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}\omega^2[&-a(\vec{k})b(-\vec{k})\exp(-2i\omega t)+a(\vec{k})a^+(\vec{k})+b^+(\vec{k})b(\vec{k}) \\
&-b^+(\vec{k})a^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+\int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}\left|\vec{k}\right|^2[&b(\vec{k})a(-\vec{k})\exp(-2i\omega t)+b(\vec{k})b^+(\vec{k})+a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \\
&+a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+m^2\int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[&b(\vec{k})a(-\vec{k})\exp(-2i\omega t)+b(\vec{k})b^+(\vec{k})+a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \\
&+a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)]
\end{aligned}
$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}\omega^2\Big[-b(\vec{k})a(-\vec{k})\exp(-2i\omega t) + \{a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + \delta(0)\} + \{b(\vec{k})b^+(\vec{k}) - \delta(0)\} - a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)\Big]$$

$$+ \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}|\vec{k}|^2[b(\vec{k})a(-\vec{k})\exp(-2i\omega t) + b(\vec{k})b^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)]$$

$$+m^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[b(\vec{k})a(-\vec{k})\exp(-2i\omega t) + b(\vec{k})b^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)]$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[\left(-\omega^2 + |\vec{k}|^2\right)b(\vec{k})a(-\vec{k})\exp(-2i\omega t) + \left(\omega^2 + |\vec{k}|^2\right)a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + \left(\omega^2 + |\vec{k}|^2\right)b(\vec{k})b^+(\vec{k}) + (-\omega^2 + |\vec{k}|^2)a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)]$$

$$+m^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[b(\vec{k})a(-\vec{k})\exp(-2i\omega t) + b(\vec{k})b^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)]$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[-m^2 b(\vec{k})a(-\vec{k})\exp(-2i\omega t) + (2\omega^2 - m^2)a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + (2\omega^2 - m^2)b(\vec{k})b^+(\vec{k}) - m^2 a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)]$$

$$+m^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[b(\vec{k})a(-\vec{k})\exp(-2i\omega t) + b(\vec{k})b^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)]$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[2\omega^2\{a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + b(\vec{k})b^+(\vec{k})\}]$$

$$= \int d^3\vec{k}\,\omega[a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + \{b^+(\vec{k})b(\vec{k}) + \delta(0)\}]$$

最後の定数項は，前 Section のときと同様にして，0 にすることができます．したがって，Hamiltonian は,

$$H = \int d^3\vec{k}\,\omega\{a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + b^+(\vec{k})b(\vec{k})\}$$

となります.

QFT02-5 実 Klein-Gordon Propagator

QFT02-6 複素 Klein-Gordon Propagator

QFT03 Dirac 場（Spinor 場）

QFT03-1 Dirac 場の古典論

　特殊相対論的量子力学の方程式である Dirac 方程式は，次の式で与えられます．

$$(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \mathrm{m})\psi(\mathrm{x}) = 0$$

ここで，

$$\partial_{\mu} = (\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}, \nabla)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{\mathrm{i}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\mathrm{i}} \\ -\sigma_{\mathrm{i}} & 0 \end{pmatrix}\ (\mathrm{i} = 1,2,3)$$

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

です．γは 4×4 の行列でガンマ行列といい，σは 2×2 の行列で Pauli 行列です．また，m は質量です．

　対応する Lagrangian 密度は，

$$\mathcal{L}(\mathrm{x}) = \bar{\psi}(\mathrm{x})(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \mathrm{m})\psi(\mathrm{x})$$

です．ただし，Minkowski 共役な場，

$$\bar{\psi} \equiv \psi^{+}\gamma^{0}$$

を導入しました．この Lagrangian 密度を Euler-Lagrange 方程式,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}) = 0$$

に代入すると，確かに Dirac 方程式が導出されることを確認しておきましょう. Euler-Lagrange 方程式のφは, この場合, $\bar{\psi}$に置き換えます. まず, 第１項は,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)$$

となります．次に，第２項は,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$$

となります．したがって，Euler-Lagrange 方程式は,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})}) = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) + 0 = 0$$

$$\therefore (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

となります．確かに，Dirac 方程式が導かれました.

Hamiltonian 密度も求めておきましょう．一般化運動量πは,

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}(x)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}(x)} \bar{\psi}(x)(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x)$$

$$= \bar{\psi} \cdot i\gamma^0$$

$$= \psi^{+}\gamma^0 \cdot i\gamma^0$$

ここで，

$$\gamma^0\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\pi(x) = i\psi^{+}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$= i\psi^{+}(x)$$

となります．したがって，Hamiltonian 密度は，

$$\mathcal{H}(x) = \pi(x)\dot{\psi}(x) - \mathcal{L}(x)$$

$$= i\psi^{+}\dot{\psi} - \bar{\psi}(x)(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x)$$

$$= i\psi^{+}\dot{\psi} - \psi^{+}\gamma^0(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)\psi \ (i = 1,2,3)$$

$$= i\psi^{+}\dot{\psi} - i\psi^{+}\dot{\psi} + \psi^{+}\gamma^0(-i\gamma^i\partial_i + m)\psi$$

（Dirac 方程式$(i\gamma^0\partial_0+i\gamma^i\partial_i-m)\psi=0$より，）

$$=\psi^+\gamma^0(i\gamma^0\partial_0\psi)$$

$$=\psi^+ i\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

と導かれます．

QFT03-2 Dirac 場の正準量子化

量子論ではオブザーバブルは演算子で表されることになります．Dirac 場ψを演算子に格上げした瞬間に，場の量子化が実行されたことになります．この際，演算子は積の順序が問題となりますので，交換関係を設定することになります．このような交換関係による量子化のことを正準量子化といいます．ただし，Dirac 場が記述するのは Fermion なので反交換関係を設定しなければなりません．Dirac 場ψとその一般化運動量πの間に次の同時刻反交換関係を設定します．

$$\begin{cases}\left\{\psi_i(t,\vec{x}),\pi_j(t,\vec{x}')\right\}=i\delta(\vec{x}-\vec{x}')\delta_{ij}\\ \left\{\psi_i(t,\vec{x}),\psi_j(t,\vec{x}')\right\}=\left\{\pi_i(t,\vec{x}),\pi_j(t,\vec{x}')\right\}=0\end{cases}\quad(1)$$

ただし，反交換子は,

$$\{A,B\}\equiv AB+BA$$

で定義されます．演算子を表すハットは省略しました．また，場の量ψやπは連続量なので，δ関数を使って反交換関係を表しています．

次に，場ψを Fourier 変換します．

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{\omega}} \sum_{\sigma=\pm 1} [\, c(\vec{k},\sigma) u(\vec{k},\sigma) \exp(-ikx) + d^{+}(\vec{k},\sigma) v(\vec{k},\sigma) \exp(ikx)] \ (2)$$

σは電子のスピンの自由度を表します．また，単に x や k と書いているのは，

$$x = x^{\mu} = (t, \vec{x})$$

$$p = p^{\mu} = (E, \vec{p}) = k = k^{\mu} = (\omega, \vec{k})$$

を意味します．したがって，kx の表記で，

$$kx = \eta_{\mu\nu} k^{\mu} x^{\nu} = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

を表します．また，ωと$\vec{k}$の間には，特殊相対性理論の要請より，

$$p^2 = p^{\mu} p_{\mu} = E^2 - |\vec{p}|^2 = k^2 = k^{\mu} k_{\mu} = \omega^2 - \left|\vec{k}\right|^2 = m^2$$

の関係が成立します．これを，On-shell 条件といいます．このとき，

$$\omega = \sqrt{\left|\vec{k}\right|^2 + m^2}$$

となります．Minkowski 共役な場は，

$$\bar{\psi} \equiv \psi^{+} \gamma^{0}$$

$$
= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{\omega}} \sum_{\sigma=\pm 1} [\, c^+(\vec{k},\sigma)\bar{u}(\vec{k},\sigma)\exp(ikx) + d(\vec{k},\sigma)\bar{v}(\vec{k},\sigma)\exp(-ikx)]
$$

となります．ここで，展開係数c, c^+, d, d^+はエルミート演算子で，次の反交換関係が成立します．

$$
\begin{cases}
\{c(\vec{k},\sigma), c^+(\vec{k}',\sigma')\} = \{d(\vec{k},\sigma), d^+(\vec{k}',\sigma')\} = \delta(\vec{k}-\vec{k}')\delta_{\sigma\sigma'} \\
\{c(\vec{k},\sigma), c(\vec{k}',\sigma')\} = \{d(\vec{k},\sigma), d(\vec{k}',\sigma')\} = \{c(\vec{k},\sigma), d(\vec{k}',\sigma')\} = 0
\end{cases} \quad (3)
$$

反交換関係(3)式が成立することを確認するために，場φを Fourier 変換した(2)式をもとの同時刻反交換関係(1)式の左辺に代入して，(3)式を使って(1)式が成立することを確かめます．

$$
\{\psi_i(t,\vec{x}), \pi_j(t,\vec{x}')\} = \{\psi_i(t,\vec{x}), i\psi_j^+(t,\vec{x}')\}
$$

$$
= i\{\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{\omega}} \sum_{\sigma=\pm 1} [\, c(\vec{k},\sigma)u_i(\vec{k},\sigma)\exp(-ikx) + d^+(\vec{k},\sigma)v_i(\vec{k},\sigma)\exp(ikx)], \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{\omega'}} \sum_{\sigma'=\pm 1} [\, c^+(\vec{k}',\sigma')u_j^+(\vec{k}',\sigma')\exp(ik'x') + d(\vec{k}',\sigma')v_j^+(\vec{k}',\sigma')\exp(-ik'x')]\}
$$

$$
= \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{im}{\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\sigma,\sigma'} \{\, c(\vec{k},\sigma)u_i(\vec{k},\sigma)\exp(-ikx) + d^+(\vec{k},\sigma)v_i(\vec{k},\sigma)\exp(ikx), c^+(\vec{k}',\sigma')u_j^+(\vec{k}',\sigma')\exp(ik'x') + d(\vec{k}',\sigma')v_j^+(\vec{k}',\sigma')\exp(-ik'x')\}
$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{im}{\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\sigma,\sigma'} [\, u_i(\vec{k},\sigma) u_j^+(\vec{k}',\sigma') \{c(\vec{k},\sigma), c^+(\vec{k}',\sigma')\} \exp\{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})\} \exp\left\{i\left(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}'\right)\right\}$$

$$+ v_i(\vec{k},\sigma) v_j^+(\vec{k}',\sigma') \{d^+(\vec{k},\sigma), d(\vec{k}',\sigma')\} \exp\{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})\} \exp\{-i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\}]$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{im}{\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\sigma,\sigma'} [\, u_i(\vec{k},\sigma) u_j^+(\vec{k}',\sigma') \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\sigma\sigma'} \exp\{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})\} \exp\{i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\}$$

$$+ v_i(\vec{k},\sigma) v_j^+(\vec{k}',\sigma') \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\sigma\sigma'} \exp\{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})\} \exp\{-i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\}]$$

（$\vec{k} = \vec{k}'$に加え, $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$より, $\omega = \omega'$も成立します.）

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{im}{\omega} \sum_{\sigma} [\, u_i(\vec{k},\sigma) u_j^+(\vec{k},\sigma) \exp\{i\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{x}')\} + v_i(\vec{k},\sigma) v_j^+(\vec{k},\sigma) \exp\{-i\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{x}')\}]$$

（柏太郎著"演習場の量子論"サイエンス社

p41 (2.94)(2.95)式より）

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{im}{\omega} [\frac{1}{2m} \begin{pmatrix} \omega + m & \vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & \omega - m \end{pmatrix}_{ij} \exp\{i\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{x}')\} + \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} \omega - m & \vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & \omega + m \end{pmatrix}_{ij} \exp\{-i\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{x}')\}]$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{im}{\omega}[\frac{1}{2m}\begin{pmatrix} \omega + m & \vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & \omega - m \end{pmatrix}_{ij} \exp\{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')\}$$

$$+ \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} \omega - m & -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} & \omega + m \end{pmatrix}_{ij} \exp\{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')\}]$$

$$= i\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij} \exp\{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')\}$$

（$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)dk$の１次元の式より，３次元にして，
$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})d^3\vec{k}$が成立します．）

$$= i\delta(\vec{x}-\vec{x}')\delta_{ij}$$

同様にして，(1)式の残りの２式も確かめることができます．

Hamiltonian を展開係数c, c^+, d, d^+で表してみましょう．Hamiltonian は,

$$H = \int d^3 x\mathcal{H}$$

$$= \int d^3 x \cdot \psi^+ i\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

です．ここで,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sqrt{\frac{m}{\omega}}\sum_{\sigma=\pm 1}[\, c(\vec{k},\sigma)u(\vec{k},\sigma)\exp(-ikx)$$

$$+ d^+(\vec{k},\sigma)v(\vec{k},\sigma)\exp(ikx)]\ (2)$$

において，エルミート共役をとると,

$$\psi^{+}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sqrt{\frac{m}{\omega}}\sum_{\sigma=\pm1}[\,c^{+}(\vec{k},\sigma)u^{+}(\vec{k},\sigma)\exp(ikx)$$
$$+\,d(\vec{k},\sigma)v^{+}(\vec{k},\sigma)\exp(-ikx)]$$

となります．上の Hamiltonian に代入して計算します．

$$H = \int d^3\,x\cdot\psi^{+}(x)i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x)$$

$$= \int d^3\,x\cdot\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sqrt{\frac{m}{\omega}}\sum_{\sigma=\pm1}[\,c^{+}(\vec{k},\sigma)u^{+}(\vec{k},\sigma)\exp(ikx)$$
$$+\,d(\vec{k},\sigma)v^{+}(\vec{k},\sigma)\exp(-ikx)]i\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sqrt{\frac{m}{\omega'}}\sum_{\sigma'=\pm1}[\,c(\vec{k}',\sigma')u(\vec{k}',\sigma')\exp(-ik'x)$$
$$+\,d^{+}(\vec{k}',\sigma')v(\vec{k}',\sigma')\exp(ik'x)]$$

$$= i\int d^3\,x\int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3}\frac{m}{\sqrt{\omega\omega'}}\sum_{\sigma\sigma'}[\,c^{+}\big(\vec{k},\sigma\big)u^{+}\big(\vec{k},\sigma\big)\exp(ikx)$$
$$+\,d\big(\vec{k},\sigma\big)v^{+}\big(\vec{k},\sigma\big)\exp(-ikx)]$$
$$\times\,[(-i\omega')c(\vec{k}',\sigma')u(\vec{k}',\sigma')\exp(-ik'x)$$
$$+\,(i\omega')d^{+}(\vec{k}',\sigma')v(\vec{k}',\sigma')\exp(ik'x)]$$

$$= \int d^3\,x\int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3}\frac{m\omega'}{\sqrt{\omega\omega'}}\sum_{\sigma\sigma'}[\,c^{+}\big(\vec{k},\sigma\big)u^{+}\big(\vec{k},\sigma\big)\exp(ikx)$$
$$+\,d\big(\vec{k},\sigma\big)v^{+}\big(\vec{k},\sigma\big)\exp(-ikx)]$$
$$\times\,[c\big(\vec{k}',\sigma'\big)u\big(\vec{k}',\sigma'\big)\exp(-ik'x)$$
$$-\,d^{+}(\vec{k}',\sigma')v(\vec{k}',\sigma')\exp(ik'x)]$$

$$= \int d^3x \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{m\omega'}{\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\sigma\sigma'} [\, c^+(\vec{k},\sigma)c(\vec{k}',\sigma')u^+(\vec{k},\sigma)u(\vec{k}',\sigma') \exp\{i(\omega - \omega')t\} \exp\{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}\}$$
$$- c^+(\vec{k},\sigma)d^+(\vec{k}',\sigma')u^+(\vec{k},\sigma)v(\vec{k}',\sigma') \exp\{i(\omega + \omega')t\} \exp\{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}\}$$
$$+ d(\vec{k},\sigma)c(\vec{k}',\sigma')v^+(\vec{k},\sigma)u(\vec{k}',\sigma') \exp\{-i(\omega + \omega')t\} \exp\{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}\}$$
$$- d(\vec{k},\sigma)d^+(\vec{k}',\sigma')v^+(\vec{k},\sigma)v(\vec{k}',\sigma') \exp\{-i(\omega - \omega')t\} \exp\{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}\}]$$

（$\delta(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)dx$の１次元の式より，３次元にして，$\delta(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})d^3\vec{x}$が成立します．）

$$= \int d^3\vec{k}d^3\vec{k}' \frac{m\omega'}{\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\sigma\sigma'} [\, c^+(\vec{k},\sigma)c(\vec{k}',\sigma')u^+(\vec{k},\sigma)u(\vec{k}',\sigma') \exp\{i(\omega - \omega')t\}\, \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$
$$- c^+(\vec{k},\sigma)d^+(\vec{k}',\sigma')u^+(\vec{k},\sigma)v(\vec{k}',\sigma') \exp\{i(\omega + \omega')t\}\, \delta(\vec{k}+\vec{k}')$$
$$+ d(\vec{k},\sigma)c(\vec{k}',\sigma')v^+(\vec{k},\sigma)u(\vec{k}',\sigma') \exp\{-i(\omega + \omega')t\}\, \delta(\vec{k}+\vec{k}')$$
$$- d(\vec{k},\sigma)d^+(\vec{k}',\sigma')v^+(\vec{k},\sigma)v(\vec{k}',\sigma') \exp\{-i(\omega - \omega')t\}\, \delta(\vec{k}-\vec{k}')]$$

（$\vec{k} = \pm\vec{k}'$に加え，$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$より，$\omega = \omega'$が成立します．）

$$= \int d^3\vec{k}\cdot m \sum_{\sigma\sigma'} [\, c^+(\vec{k},\sigma)c(\vec{k},\sigma')u^+(\vec{k},\sigma)u(\vec{k},\sigma')$$
$$- c^+(\vec{k},\sigma)d^+(-\vec{k},\sigma')u^+(\vec{k},\sigma)v(-\vec{k},\sigma') \exp(2i\omega t)$$
$$+ d(\vec{k},\sigma)c(-\vec{k},\sigma')v^+(\vec{k},\sigma)u(-\vec{k},\sigma') \exp(-2i\omega t)$$
$$- d(\vec{k},\sigma)d^+(\vec{k},\sigma')v^+(\vec{k},\sigma)v(\vec{k},\sigma')]$$

（柏太郎著”演習場の量子論”サイエンス社

p41 (2.91)(2.92)式より）

$$= \int d^3\vec{k}\cdot m\sum_{\sigma\sigma'}[\,c^+(\vec{k},\sigma)c(\vec{k},\sigma')\frac{\omega}{m}\delta_{\sigma\sigma'} - c^+(\vec{k},\sigma)d^+(-\vec{k},\sigma')\cdot 0 \cdot \exp(2i\omega t) + d(\vec{k},\sigma)c(-\vec{k},\sigma')\cdot 0\cdot \exp(-2i\omega t) - d(\vec{k},\sigma)d^+(\vec{k},\sigma')\frac{\omega}{m}\delta_{\sigma\sigma'}]$$

$$= \int d^3\vec{k}\cdot\omega\sum_{\sigma}[\,c^+(\vec{k},\sigma)c(\vec{k},\sigma) - d(\vec{k},\sigma)d^+(\vec{k},\sigma)]$$

$$= \int d^3\vec{k}\cdot\omega\sum_{\sigma}[\,c^+(\vec{k},\sigma)c(\vec{k},\sigma) + d^+(\vec{k},\sigma)d(\vec{k},\sigma) + \delta(0)]$$

ここで，第３項はデルタ関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{k})\delta\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)dx = f(\vec{k}')$$

より，$\vec{k}=0$のときのωの値が出てくることになります．

$$\int d^3\vec{k}\,\omega\sum_{\sigma}\delta(0) = \int d^3\vec{k}\sqrt{\left|\vec{k}\right|^2 + m^2}\cdot 2\delta(0)$$

$$= 2\sqrt{0^2 + m^2}$$

$$= 2m$$

これは定数なので，エネルギー軸の原点をずらして０にすることができま

す．したがって，Hamiltonian は,

$$\mathrm{H} = \int \mathrm{d}^3\,\vec{\mathrm{k}} \cdot \omega \sum_{\sigma} [\, \mathrm{c}^{+}(\vec{\mathrm{k}},\sigma)\mathrm{c}(\vec{\mathrm{k}},\sigma) + \mathrm{d}^{+}(\vec{\mathrm{k}},\sigma)\mathrm{d}(\vec{\mathrm{k}},\sigma)]$$

で与えられることになります．

QFT04 Maxwell 場（Vector 場）

QFT04-1 Maxwell 場の古典論

特殊相対論的電磁気学の方程式である Maxwell 方程式は, 次の式で与えられます.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x)$$

ここで,

$$x = x^\mu = (t, \vec{x})$$

$$\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$$

$$\partial^\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$$

$$F^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$$

$$A^\mu(x) = (\phi(x), \vec{A}(x))$$

$$j^\mu(x) = (\rho(x), \vec{j}(x))$$

です．対応する Lagrangian 密度は,

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - j^\mu A_\mu(x)$$

で与えられます．この Lagrangian 密度を Euler-Lagrange 方程式,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\nu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)})=0$$

に代入すると,確かに Maxwell 方程式が導出されることを確認しておきましょう．Euler-Lagrange 方程式のφは，この場合，A_μに置き換えます．

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu}-\partial_\nu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)})=0$$

ここで,

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=F_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)$$

$$=F_{\mu\nu}\,\partial^\mu A^\nu-F_{\mu\nu}\,\partial^\nu A^\mu$$

ですが，最後の式の第２項で添え字のμ，νを入れ換えると，$F_{\mu\nu}$の反対称性より,

$$F_{\mu\nu}\,\partial^\nu A^\mu=F_{\nu\mu}\,\partial^\mu A^\nu$$

$$=-F_{\mu\nu}\,\partial^\mu A^\nu$$

となります．したがって,

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=2F_{\mu\nu}\,\partial^\mu A^\nu$$

$$=2(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)\,\partial^\mu A^\nu$$

なので，与えた Lagrangian 密度は,

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\,\partial^\mu A^\nu - j^\mu A_\mu$$

と書き直すことができます．この Lagrangian 密度の第 1 項は,

$$-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\partial^\mu A^\nu = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\eta^{\rho\mu}\eta^{\sigma\nu}\,\partial_\rho A_\sigma$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho)\,\partial_\rho A_\sigma$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)\,\partial_\nu A_\mu$$

とも書き直すことができることにも注意しましょう．このとき，Euler-Lagrange 方程式,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)}\right) = 0$$

は,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -j^\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)} = -\frac{1}{2}(-\,\partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2}\partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)$$

$$= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$= F^{\mu\nu}$$

より,

$$-j^{\mu} - \partial_{\nu} F^{\mu\nu} = 0$$

$$\therefore -j^{\mu} + \partial_{\nu} F^{\nu\mu} = 0$$

$$\therefore \partial_{\mu} F^{\mu\nu} = j^{\nu}$$

となります．確かに，Maxwell 方程式が導かれました.

次に，Source が無く，$j^{\nu} = 0$の場合を考えます．このとき，Lagrangian 密度は,

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \ (1)$$

となり，真空中の Maxwell 方程式は,

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu}(x) = 0$$

となります.

(1)式の Lagrangian 密度はゲージ不変性をもっていますが,ゲージを固定するため，αを任意定数として,

$$-\frac{1}{2\alpha} [\partial_{\mu} A^{\mu}(x)]^2$$

というゲージ固定項を手で加えます．このとき，Lagrangian 密度は,

$$\boxed{\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2\alpha}[\partial_\mu A^\mu(x)]^2} \ (\mathrm{qft04}-1)$$

と，修正されます．ここで，α=1 という Feynman ゲージを選ぶと，

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}[\partial_\mu A^\mu(x)]^2 \ (2)$$

となります．この(2)式の Lagrangian 密度について，一般化運動量を計算します．ここで，前述の式変形と同様に，

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\,\partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2}[\partial_\mu A^\mu(x)]^2$$

と書き直すことができます．さらに，この式の右辺第 1 項は，前述の式変形と同様に，

$$-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\partial^\mu A^\nu = -\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)\,\partial_\nu A_\mu$$

とも書き直すことができることにも注意しましょう．また, 右辺第 2 項を,

$$-\frac{1}{2}\partial^\mu A_\mu(x)\,\partial^\nu A_\nu(x)$$

と変形しておきます．したがって，一般化運動量の時間成分は,

$$\pi^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_0}$$

$$= -\frac{1}{2}\partial^0 A^0 - \frac{1}{2}(-\partial^0 A^0) - \frac{1}{2}(\partial^0 A^0 - \partial^0 A^0) - \frac{1}{2}\partial^\nu A_\nu - \frac{1}{2}\partial^\mu A_\mu$$

$$= -\partial^{\mu}A_{\mu}$$

$$= -(\partial^0, -\nabla)\cdot(A_0, -\vec{A})$$

$$= -\dot{A}_0 - \nabla\cdot\vec{A}$$

$$= -\dot{A}^0 - \nabla\cdot\vec{A}$$

$$= -\partial_{\mu}A^{\mu}$$

となります．空間成分は,

$$\pi^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_i}\ (i = 1,2,3)$$

$$= -\frac{1}{2}\partial^0A^i - \frac{1}{2}\left(-\partial^iA^0\right) - \frac{1}{2}\left(\partial^0A^i - \partial^iA^0\right)$$

$$= \partial^iA^0 - \dot{A}^i$$

となります.

QFT04-2 Maxwell 場の正準量子化

量子論ではオブザーバブルは演算子で表されることになります．Maxwell 場A^{μ}を演算子に格上げした瞬間に, 場の量子化が実行されたことになります．この際，演算子は積の順序が問題となりますので，交換関係を設定することになります．このような交換関係による量子化のことを正準量子化といいます．次の同時刻交換関係を設定します.

$$\begin{cases} \left[A^{\mu}(t,\vec{x}), \dot{A}^{\nu}(t,\vec{x}')\right] = -i\delta^{\mu\nu}\delta(\vec{x}-\vec{x}') \\ [A^{\mu}(t,\vec{x}), A^{\nu}(t,\vec{x}')] = [\dot{A}^{\mu}(t,\vec{x}), \dot{A}^{\nu}(t,\vec{x}')] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

演算子を表すハットは省略しました. また, 場の量A^{μ}や$\dot{A}^{\mu}$は連続量なので, δ関数を使って交換関係を表しています．次に，場A^{μ}を Fourier 変換します．

$$A^{\mu}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \sum_{\lambda=0}^{3} [\, a(\vec{k},\lambda)\varepsilon^{\mu}(\vec{k},\lambda)\exp(-ikx) + a^{+}(\vec{k},\lambda)\varepsilon^{\mu+}(\vec{k},\lambda)\exp(ikx)] \ (4)$$

単に x や k と書いているのは,

$$x = x^{\mu} = (t,\vec{x})$$

$$p = p^{\mu} = (E,\vec{p}) = k = k^{\mu} = (\omega,\vec{k})$$

を意味します．したがって，kx の表記で,

$$kx = \eta_{\mu\nu}k^{\mu}x^{\nu} = Et - \vec{p}\cdot\vec{x} = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}$$

を表します．また，ωと$\vec{k}$の間には，特殊相対性理論の要請より,

$$p^2 = p^{\mu}p_{\mu} = E^2 - |\vec{p}|^2 = k^2 = k^{\mu}k_{\mu} = \omega^2 - \left|\vec{k}\right|^2 = m^2$$

の関係が成立します．これを，On-shell 条件といいます．このとき,

$$\omega = \sqrt{\left|\vec{k}\right|^2 + m^2}$$

となります．また，εは偏光ベクトルといい，４次元ミンコフスキー時空における基本単位ベクトル（基底ベクトル）です．εは，お互いに独立ならば自由に選択することができますが，簡単のため，$\vec{k}$の向きが z 方向になるように基準系を設定して，

$$\varepsilon^{\mu}(\vec{k},0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon^{\mu}(\vec{k},1)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon^{\mu}(\vec{k},2)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon^{\mu}(\vec{k},3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

とします．このとき，光は z 方向に進んでいるとしたので，

$$k_{\mu}\varepsilon^{\mu}(\vec{k},1)=k_{\mu}\varepsilon^{\mu}(\vec{k},2)=0$$

が成立します．すなわち，λ=1,2 は横波成分を表します．そして，λ=3 は縦波成分を，λ=0 は時間成分を表します．上の具体的表式より，

$$\varepsilon^{\mu+}(\vec{k},\lambda)\varepsilon^{\mu}(\vec{k},\lambda')=\delta_{\lambda\lambda'}$$

が成立します．例えば,

$$\varepsilon^{\mu+}(\vec{k},0)\varepsilon^{\mu}(\vec{k},0)=(1,0,0,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=1$$

$$\varepsilon^{\mu+}(\vec{k},0)\varepsilon^{\mu}(\vec{k},1)=(1,0,0,0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=0$$

等です．つまり，εは規格直交系を形成していることがわかります．さらに，

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon^{\mu+}\left(\vec{k},\lambda\right)\varepsilon^{\nu}(\vec{k},\lambda) = \delta^{\mu\nu}$$

が成立します．具体的表式より，例えば，

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon^{0+}\left(\vec{k},\lambda\right)\varepsilon^{0}(\vec{k},\lambda) = \varepsilon^{0+}\left(\vec{k},0\right)\varepsilon^{0}(\vec{k},0) + \cdots + \varepsilon^{0+}\left(\vec{k},3\right)\varepsilon^{0}(\vec{k},3)$$

$$= 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0$$

$$= 1$$

$$= \delta^{00}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon^{0+}\left(\vec{k},\lambda\right)\varepsilon^{1}(\vec{k},\lambda) = \varepsilon^{0+}\left(\vec{k},0\right)\varepsilon^{1}(\vec{k},0) + \cdots + \varepsilon^{0+}\left(\vec{k},3\right)\varepsilon^{1}(\vec{k},3)$$

$$= 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0$$

$$= 0$$

$$= \delta^{01}$$

等です．上式はεの完全性を表しています．展開係数a, a^{+}に目を向けましょう．これらはエルミート演算子で，次の交換関係が成立します．

$$\begin{cases} [a(\vec{k},\lambda), a^+(\vec{k}',\lambda')] = -\delta^{\lambda\lambda'}\delta(\vec{k}-\vec{k}') \\ [a(\vec{k},\lambda), a(\vec{k}',\lambda')] = [a^+(\vec{k},\lambda), a^+(\vec{k}',\lambda')] = 0 \end{cases} \quad (5)$$

交換関係(5)式が成立することを確認するために，場A^μを Fourier 変換した(4)式をもとの同時刻交換関係(3)式の左辺に代入して，(5)式を使って(3)式が成立することを確かめます．以下，(3)式の第１式を計算します．

$$\begin{aligned}
&[A^\mu(t,\vec{x}), \dot{A}^\nu(t,\vec{x}')] \\
&= [\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \sum_{\lambda=0}^{3} [\, a(\vec{k},\lambda)\varepsilon^\mu(\vec{k},\lambda)\exp(-ikx) \\
&+ a^+(\vec{k},\lambda)\varepsilon^{\mu+}(\vec{k},\lambda)\exp(ikx)], \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} \sum_{\lambda'=0}^{3} [\, a(\vec{k}',\lambda')\varepsilon^\nu(\vec{k}',\lambda')(-i\omega')\exp(-ik'x') \\
&+ a^+(\vec{k}',\lambda')\varepsilon^{\nu+}(\vec{k}',\lambda')(i\omega')\exp(ik'x')]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\lambda,\lambda'} [\, [a(\vec{k},\lambda), a^+(\vec{k}',\lambda')]\varepsilon^{\nu+}(\vec{k}',\lambda')\varepsilon^\mu(\vec{k},\lambda)(i\omega')\exp\{-i(\omega t \\
&- \vec{k}\cdot\vec{x})\}\exp\{i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\} \\
&+ [a^+(\vec{k},\lambda), a(\vec{k}',\lambda')]\varepsilon^{\mu+}(\vec{k},\lambda)\varepsilon^\nu(\vec{k}',\lambda')(-i\omega')\exp\{i(\omega t - \vec{k} \\
&\cdot\vec{x})\}\exp\{-i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\lambda,\lambda'} [\\
&\qquad -\delta^{\lambda\lambda'}\delta(\vec{k} \\
&\qquad -\vec{k}')\varepsilon^{\nu+}(\vec{k}',\lambda')\varepsilon^\mu(\vec{k},\lambda)(i\omega')\exp\{-i(\omega t - \vec{k} \\
&\qquad \cdot\vec{x})\}\exp\{i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\} + \delta^{\lambda\lambda'}\delta(\vec{k} \\
&\qquad -\vec{k}')\varepsilon^{\mu+}(\vec{k},\lambda)\varepsilon^\nu(\vec{k}',\lambda')(-i\omega')\exp\{i(\omega t - \vec{k} \\
&\qquad \cdot\vec{x})\}\exp\{-i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{x}')\}]
\end{aligned}$$

（$\vec{k}=\vec{k}'$に加え，$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$より，$\omega = \omega'$も成立します．）

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{\lambda} [-\varepsilon^{\nu +}(\vec{k},\lambda)\varepsilon^{\mu}(\vec{k},\lambda)(i\omega)\exp\{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')\}$$
$$+\varepsilon^{\mu +}(\vec{k},\lambda)\varepsilon^{\nu}(\vec{k},\lambda)(-i\omega)\exp\{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')\}]$$

（$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ikx)dk$の１次元の式より，３次元にして，$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})d^3\vec{k}$が成立します．さらに前述の，$\sum_{\lambda=0}^{3}\varepsilon^{\mu +}(\vec{k},\lambda)\varepsilon^{\nu}(\vec{k},\lambda) = \delta^{\mu\nu}$を利用します．）

$$= \frac{1}{2\omega}\{-\delta^{\mu\nu}(i\omega)\delta(\vec{x}-\vec{x}') + \delta^{\mu\nu}(-i\omega)\delta(\vec{x}-\vec{x}')\}$$

$$= -i\delta^{\mu\nu}\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

確かに，(3)式の第１式が導かれました．第２式，第３式も同様に導くことができます．