

J Simplicity 場の量子論

Preface

場の量子論は、特殊相対性理論と量子力学を融合した素粒子の基礎理論です。

Contents

Part1 古典場と自由量子場

QFT01 場の古典論

QFT02 Klein-Gordon 場 (Scalar 場)

QFT03 Dirac 場 (Spinor 場)

QFT04 Maxwell 場 (Vector 場)

Part2 相互作用する場

QFT05 S行列 (制作中)

QFT06 経路積分量子化 (制作中)

QFT07 Feynman Diagrams (制作中)

Part1 古典場と自由量子場

QFT01 場の古典論

QFT01-1 自然単位系と特殊相対論的 Notation

素粒子論で使用する単位系は,

$$\hbar = c = 1$$

とする自然単位系を採用します. 言うまでもなく, \hbar はプランク定数を 2π で割ったもの, c は光速です.

場の量子論は, 特殊相対性理論と量子力学を融合し, 場という概念を推し進めた理論ですが, ここで, 特殊相対性理論の表記についてまとめておきます. まず, 計量テンソルは,

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とします. また, ギリシア文字は $\mu = 0,1,2,3$ のようにとります. 第0成分は時間成分, 第1, 2, 3成分は空間成分です. 座標ベクトルは,

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x})$$

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\vec{x})$$

です. 上付き添え字は反変ベクトル, 下付き添え字は共変ベクトルです. また, 上下に同じギリシア文字が対になって現れる場合, $0,1,2,3$ について和をとるというアインシュタインの規約を使います. ローレンツ変換は,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

において、インターバルの2乗が不変であるという条件、

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = \eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma$$

すなわち、

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$$

を満たす変換を言います。また、縮約をとったスカラー、すなわちローレンツ不変量の例としては、インターバルの2乗の他に、

$$p_x = \eta_{\mu\nu} p^\mu x^\nu = E t - \vec{p} \cdot \vec{x} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\vec{p}|^2 = \omega^2 - |\vec{k}|^2 = m^2$$

等があります。(式の変形には $\hbar = 1$ とした、アインシュタイン-ド・ブロイの関係式を使っています。) また微分演算子として、

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

があります。縮約をとると、

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

となります。

QFT01-2 Lagrangian 形式

場という量を一般的に,

$$\phi(x)$$

と表しておきます。ここで, x は時間 1 次元と空間 3 次元をまとめて表しています。

$$x \equiv x^\mu = (t, \vec{x})$$

つまり, 場という量は空間の関数になっていて, それが時間的に変動するものであると考えることができます。

場を Lagrangian 形式の解析力学で取り扱ってみましょう。Lagrangian の L を Lagrangian 密度 $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ で表す場合, 空間 3 次元について積分して,

$$L = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^3x$$

となります。($d^3x = dx dy dz$.) さらに, Lagrangian を時間で積分した量を作用 S といいます。

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x$$

$$(d^4x = dt dx dy dz.)$$

ここで、ある領域 Ω に対して、場 ϕ を、

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x)$$

となるように、変化させます。ただし、領域の境界で、

$$\delta\phi(x) = 0 \text{ (Boundary)}$$

が成立するものとします。場 ϕ が上述のように変わるとき、作用 S は、

$$S \rightarrow S + \delta S$$

と表記されますが、

$$\delta S = 0$$

となることを自然は要求します。言い直すと、作用 S を最小にするように自然はできているのです。この原理を最小作用の原理と言います。ここで、左辺を次のように計算します。

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \right\} \end{aligned}$$

ここで、右辺第2項は、

$$\begin{aligned}
\int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu(\delta\Phi) &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi)} \partial_0(\delta\Phi) + \cdots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 \Phi)} \partial_3(\delta\Phi) \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi)} \delta\Phi \right) - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi)} \right) \delta\Phi + \cdots + \partial_3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 \Phi)} \delta\Phi \right) \right. \\
&\quad \left. - \partial_3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 \Phi)} \right) \delta\Phi \right\} \\
&= \int dx^1 dx^2 dx^3 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi)} \delta\Phi \right]_{\text{Boundary}} + \cdots \\
&\quad + \int dx^0 dx^1 dx^2 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 \Phi)} \delta\Phi \right]_{\text{Boundary}} \\
&\quad - \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \delta\Phi \\
&= 0 - \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \delta\Phi
\end{aligned}$$

最後の変形には境界面において,

$$\delta\Phi = 0$$

であることを使いました. よって,

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta\Phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \delta\Phi \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \right\} \delta\Phi = 0
\end{aligned}$$

となります. 任意の $\delta\Phi$ について, この式が成立するためには, 被積分が0にならなければなりません. 故に,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

が成立します。この場の方程式を Euler-Lagrange 方程式と言います。

次に, Hamiltonian について見ておきます。通常の解析力学を場について拡張した議論を行います。まず, 場の共役運動量密度 π を,

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}$$

で定義します。更に, Hamiltonian 密度 \mathcal{H} を定義します。

$$\mathcal{H}(x) \equiv \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

この Hamiltonian 密度から, Hamiltonian H が計算されます。

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x)$$

QFT02 Klein-Gordon 場 (Scalar 場)

QFT02-1 実 Klein-Gordon 場の古典論

特殊相対論的量子力学の方程式である Klein-Gordon 方程式は、次の式で与えられます。

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0$$

ここで,

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot (-\nabla) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

であり, m は質量です。また, $\phi(x)$ は一成分のみの波動場で, ローレンツ変換,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

について,

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x')$$

と変換されるとすれば, ローレンツ変換の下で Klein-Gordon 方程式は,

$$(\partial'_\mu \partial'^\mu + m^2)\phi'(x') = 0$$

となります。ここで, $\partial_\mu \partial^\mu$ はローレンツ不変量であり,

$$\partial'_\mu \partial'^\mu = \partial_\mu \partial^\mu$$

が成立するので,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi'(x') = 0$$

となります。 $\phi'(x')$ は、 $\phi(x)$ と全く同形の方程式を満たすことが要求されるので、 ϕ のローレンツ変換性は,

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

となります。 この変換性はスカラーなので、 ϕ はスカラー場とも呼ばれます。

$\phi(x)$ が実数の場合、つまり実 Klein-Gordon 場の場合、対応する Lagrangian 密度は,

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x)$$

となります。 この Lagrangian 密度を Euler-Lagrange 方程式,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

に代入すると、確かに Klein-Gordon 方程式が導出されることを確認しておきましょう。 まず、第1項は,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{1}{2} m^2 \cdot 2\phi$$

$$= -m^2\phi$$

となります。第2項を計算するため、Lagrangian 密度を、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi(x)\partial_\sigma\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$$

と変形しておきます。μやνをρやσに置き換えても、Einstein の規約によりそれぞれ和をとることになりますので、問題ありません。このとき、

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}\eta^{\nu\mu}\partial_\nu\phi$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$$

$$= \partial^\mu\phi$$

となります。1行目から2行目への変形には $\eta^{\nu\mu} = \eta^{\mu\nu}$ を使いました。2行目から3行目への変形は、 $\eta^{\mu\nu}$ によって、添え字を上にしたのですね。したがって、Euler-Lagrange 方程式は、

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = -m^2\phi - \partial_\mu\partial^\mu\phi = 0$$

$$\therefore (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0$$

となります。確かに、Klein-Gordon 方程式が導かれました。

Hamiltonian 密度も求めておきましょう。一般化運動量nは、

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} \\
&= \frac{1}{2} \dot{\phi} + \frac{1}{2} \dot{\phi} \\
&= \dot{\phi}
\end{aligned}$$

となります。したがって、Hamiltonian 密度は、

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(x) &= \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x) \\
&= \pi(x)\pi(x) - \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) \right\} \\
&= \pi^2 - \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \phi)^2 \right\} - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} [\pi^2(x) + \{\nabla \phi(x)\}^2 + m^2 \phi^2(x)]
\end{aligned}$$

と導かれます。

QFT02-2 複素 Klein-Gordon 場の古典論

Klein-Gordon 場 $\phi(x)$ が複素数の場合、つまり複素 Klein-Gordon 場の場合は、独立な場は $\phi(x)$ とこれにエルミート共役な関係にある場 $\phi^+(x)$ の 2 種類となり、それぞれ Klein-Gordon 方程式を満たします。このとき、Lagrangian 密度は、

$$\mathcal{L}(x) = \partial_\mu \bar{\phi}(x) \partial^\mu \phi^+(x) - m^2 \phi^+(x) \phi(x)$$

になります。確かに、この Lagrangian 密度から Euler-Lagrange 方程式により、複素 Klein-Gordon 方程式が導出されることを確認しましょう。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

の第1項は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^+$$

となります。また、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi^+$$

となります。このとき、Euler-Lagrange 方程式は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = -m^2 \phi^+ - \partial_\mu \partial^\mu \phi^+ = 0$$

$$\therefore (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi^+(x) = 0$$

となり、エルミート共役をとった Klein-Gordon 方程式が導かれます。次にエルミート共役をとっていない $\phi(x)$ についての関係を導くには、このエルミート共役をとった Klein-Gordon 方程式について、さらに両辺エルミート共役をとります。このとき、

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0$$

が成立します。以上で、複素 Klein-Gordon 方程式が計 2 式導かれました。

Hamiltonian 密度も求めておきましょう。まず、 ϕ, ϕ^+ に共役な一般化運動量 π, π^+ は、

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \dot{\phi}}$$

$$= \dot{\phi}^+(x)$$

$$\pi^+(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \dot{\phi}^+}$$

$$= \dot{\phi}(x)$$

となります。したがって、Hamiltonian 密度は、

$$\mathcal{H}(x) = \pi(x)\dot{\phi}(x) + \pi^+(x)\dot{\phi}^+(x) - \mathcal{L}(x)$$

$$= 2\pi^+(x)\pi(x) - \{\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi^+(x) - m^2 \phi^+(x)\phi(x)\}$$

$$= 2\pi^+\pi - \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi^+}{\partial t} - (\nabla \phi)(\nabla \phi^+) - m^2 \phi^+ \phi \right\}$$

$$= \pi^+(x)\pi(x) + \{\nabla \phi^+(x)\}\{\nabla \phi(x)\} + m^2 \phi^+(x)\phi(x)$$

となります。

QFT02-3 実 Klein-Gordon 場の正準量子化

量子論ではオブザーバブルは演算子で表されることとなります。実

Klein-Gordon 場 ϕ を演算子に格上げした瞬間に、場の量子化が実行されたこととなります。この際、演算子は積の順序が問題となりますので、交換関係を設定することとなります。このような交換関係による量子化のことを正準量子化といいます。量子力学での位置演算子と運動量演算子の間の交換関係、

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{x}, \hat{p}_z] = [\hat{y}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_z] = [\hat{z}, \hat{p}_x] = [\hat{z}, \hat{p}_y] = 0$$

$$[\hat{x}, \hat{x}] = [\hat{y}, \hat{y}] = [\hat{z}, \hat{z}] = [\hat{p}_x, \hat{p}_x] = [\hat{p}_y, \hat{p}_y] = [\hat{p}_z, \hat{p}_z] = 0$$

$$[\hat{x}, \hat{y}] = [\hat{y}, \hat{z}] = [\hat{z}, \hat{x}] = [\hat{p}_x, \hat{p}_y] = [\hat{p}_y, \hat{p}_z] = [\hat{p}_z, \hat{p}_x] = 0$$

を参考にして、実 Klein-Gordon 場 ϕ とその一般化運動量 π の間に次の同時刻交換関係を設定します。

$$\begin{cases} [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{x}')] = [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

演算子を表すハットは省略しました。また、場の量 ϕ や π は連続量なので、 δ 関数を使って交換関係を表しています。

次に、場 ϕ を Fourier 変換します。

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [a(\vec{k})\exp(-ikx) + a^\dagger(\vec{k})\exp(ikx)] \quad (2)$$

単に x や k と書いているのは、

$$x = x^\mu = (t, \vec{x})$$

$$p = p^\mu = (E, \vec{p}) = k = k^\mu = (\omega, \vec{k})$$

を意味します。したがって、 kx の表記で、

$$kx = \eta_{\mu\nu} k^\mu x^\nu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

を表します。また、 ω と \vec{k} の間には、特殊相対性理論の要請より、

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\vec{p}|^2 = k^2 = k^\mu k_\mu = \omega^2 - |\vec{k}|^2 = m^2$$

の関係が成立します。これを、On-shell 条件といいます。このとき、

$$\omega = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$$

となります。場 ϕ を Fourier 変換した式には、第2項が付いています。これは、 ϕ が実の場、つまり、エルミートな場であることを満たすために付け加えられたものです。確かに、(2)式より、

$$\begin{aligned} \phi^+(x) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [a^+(\vec{k}) \exp(ikx) + a(\vec{k}) \exp(-ikx)] \\ &= \phi(x) \end{aligned}$$

となります。ここで、展開係数 a, a^+ はエルミート演算子で、次の交換関係が成立します。

$$\begin{cases} [a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

交換関係(3)式が成立することを確認するために, 場 ϕ を Fourier 変換した(2)式をもとの同時刻交換関係(1)式の左辺に代入して, (3)式を使って(1)式が成立することを確認めます.

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] &= [\phi(t, \vec{x}), \dot{\phi}(t, \vec{x}')] \\ &= \left[\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [a(\vec{k}) \exp(-ikx) \right. \\ &\quad \left. + a^+(\vec{k}) \exp(ikx)], \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} [a(\vec{k}') \exp(-ik'x') \right. \\ &\quad \left. + a^+(\vec{k}') \exp(ik'x')] \right] \\ &= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} [a(\vec{k}) \exp\{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\} \\ &\quad + a^+(\vec{k}) \exp\{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\}, -i\omega' a(\vec{k}') \exp\{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\} \\ &\quad + i\omega' a^+(\vec{k}') \exp\{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\}] \\ &= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} \{i\omega' [a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] \exp\{-i(\omega t - \vec{k} \\ &\quad \cdot \vec{x})\} \exp\{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\} \\ &\quad - i\omega' [a^+(\vec{k}), a(\vec{k}')] \exp\{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\} \exp\{-i(\omega' t - \vec{k}' \\ &\quad \cdot \vec{x}')\}\} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} \{i\omega' \delta(\vec{k} - \vec{k}') \exp\{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\} \exp\{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\} - i\omega' \{-\delta(\vec{k} - \vec{k}')\} \exp\{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\} \exp\{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\}\}$$

($\vec{k} = \vec{k}'$ に加え, $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ より, $\omega = \omega'$ も成立します.)

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} [i\omega \exp\{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')\} + i\omega \exp\{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')\}]$$

($\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dk$ の1次元の式より, 3次元にして,
 $\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{k}$ が成立します.)

$$= \frac{1}{2\omega} 2i\omega \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$= i\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

同様にして, (1)式の残りの2式も確かめることができます.

Hamiltonian を展開係数 a, a^+ で表してみましょう. Hamiltonian は,

$$H = \int d^3x \mathcal{H}$$

$$= \int d^3x \frac{1}{2} [\pi^2(x) + \{\nabla\phi(x)\}^2 + m^2\phi^2(x)]$$

です. ここで,

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [a(\vec{k}) \exp(-ikx) + a^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx)] \quad (2)$$

でしたが,

$$kx = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

より,

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (-i\omega) [a(\vec{k}) \exp(-ikx) - a^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx)]$$

$$\nabla\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (i\vec{k}) [a(\vec{k}) \exp(-ikx) - a^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx)]$$

となります。上の Hamiltonian に代入して計算します。

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \frac{1}{2} [\pi^2(x) + \{\nabla\phi(x)\}^2 + m^2\phi^2(x)] \\ &= \int d^3x \frac{1}{2} \left[\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (-i\omega) [a(\vec{k}) \exp(-ikx) \right. \\ &\quad \left. - a^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx)] \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} (-i\omega') [a(\vec{k}') \exp(-ik'x) \right. \\ &\quad \left. - a^\dagger(\vec{k}') \exp(ik'x)] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (i\vec{k}) [a(\vec{k}) \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x}) \\
& - a^\dagger(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})] \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} (i\vec{k}') [a(\vec{k}') \exp(-i\vec{k}'\cdot\vec{x}) \\
& - a^\dagger(\vec{k}') \exp(i\vec{k}'\cdot\vec{x})] \\
& + m^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [a(\vec{k}) \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x}) \\
& + a^\dagger(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})] \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} [a(\vec{k}') \exp(-i\vec{k}'\cdot\vec{x}) \\
& + a^\dagger(\vec{k}') \exp(i\vec{k}'\cdot\vec{x})] \\
& = \frac{1}{2} \left[\int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega\omega'}} \int d^3x (-\omega\omega') [a(\vec{k}) a(\vec{k}') \exp\{-i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{x}\} \right. \\
& \quad - a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') \exp\{-i(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{x}\} \\
& \quad - a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}') \exp\{i(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{x}\} \\
& \quad \left. + a^\dagger(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') \exp\{i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{x}\} \right] \\
& + \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega\omega'}} \int d^3x (-\vec{k} \\
& \quad \cdot \vec{k}') [a(\vec{k}) a(\vec{k}') \exp\{-i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{x}\} \\
& \quad - a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') \exp\{-i(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{x}\} \\
& \quad - a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}') \exp\{i(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{x}\} \\
& \quad \left. + a^\dagger(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') \exp\{i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{x}\} \right] \\
& + m^2 \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega\omega'}} \int d^3x [a(\vec{k}) a(\vec{k}') \exp\{-i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{x}\} \\
& \quad + a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') \exp\{-i(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{x}\} \\
& \quad + a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}') \exp\{i(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{x}\} \\
& \quad \left. + a^\dagger(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') \exp\{i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{x}\}] \right]
\end{aligned}$$

$(\delta(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) d\vec{x})$ の 1次元の式より, 3次元にして,

$$\delta(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{x} \text{が成立します.})$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{2\sqrt{\omega\omega'}} (-\omega\omega' - \vec{k} \cdot \vec{k}') [a(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k} + \vec{k}') \exp\{-i(\omega + \omega')t\} - a(\vec{k})a^+(\vec{k}')\delta(\vec{k} - \vec{k}') \exp\{-i(\omega - \omega')t\} - a^+(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k} - \vec{k}') \exp\{i(\omega - \omega')t\} + a^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')\delta(\vec{k} + \vec{k}') \exp\{i(\omega + \omega')t\}] \right]$$

$$+ m^2 \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{2\sqrt{\omega\omega'}} [a(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k} + \vec{k}') \exp\{-i(\omega + \omega')t\} + a(\vec{k})a^+(\vec{k}')\delta(\vec{k} - \vec{k}') \exp\{-i(\omega - \omega')t\} + a^+(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k} - \vec{k}') \exp\{i(\omega - \omega')t\} + a^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')\delta(\vec{k} + \vec{k}') \exp\{i(\omega + \omega')t\}]$$

($\vec{k} = \pm\vec{k}'$ に加え, $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ より, $\omega = \omega'$ が成立します.)

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [(-\omega^2 + |\vec{k}|^2)a(\vec{k})a(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) - (-\omega^2 - |\vec{k}|^2)a(\vec{k})a^+(\vec{k}) - (-\omega^2 - |\vec{k}|^2)a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + (-\omega^2 + |\vec{k}|^2)a^+(\vec{k})a^+(-\vec{k}) \exp(2i\omega t)] \right]$$

$$+ m^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [a(\vec{k})a(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) + a(\vec{k})a^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a^+(-\vec{k}) \exp(2i\omega t)]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [-m^2 a(\vec{k})a(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) + (2\omega^2 - m^2)a(\vec{k})a^+(\vec{k}) + (2\omega^2 - m^2)a^+(\vec{k})a(\vec{k}) - m^2 a^+(\vec{k})a^+(-\vec{k}) \exp(2i\omega t)] \right]$$

$$\begin{aligned}
& +m^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [a(\vec{k})a(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) + a(\vec{k})a^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \\
& \quad + a^+(\vec{k})a^+(-\vec{k})\exp(2i\omega t)] \\
& = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [2\omega^2 \{a(\vec{k})a^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k})\}] \\
& = \frac{1}{2} \int d^3\vec{k} \omega [a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + \delta(0)] + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \\
& = \int d^3\vec{k} \omega a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + \frac{1}{2} \int d^3\vec{k} \omega \delta(0)
\end{aligned}$$

ここで、第2項はデルタ関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{k}) \delta(\vec{k} - \vec{k}') dx = f(\vec{k}')$$

より、 $\vec{k} = 0$ のときの ω の値が出てくることになります。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int d^3\vec{k} \omega \delta(0) & = \frac{1}{2} \int d^3\vec{k} \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \delta(0) \\
& = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + m^2} \\
& = \frac{1}{2} m
\end{aligned}$$

これは定数なので、エネルギー軸の原点をずらして0にすることができま
す。したがって、Hamiltonian は、

$$H = \int d^3\vec{k} \omega a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k})$$

で与えられることとなります。

QFT02-4 複素 Klein-Gordon 場の正準量子化

実 Klein-Gordon 場の場合と同様に，複素 Klein-Gordon 場 ϕ とその一般化運動量 π の間に次の同時刻交換関係を設定し量子化します。ただし， $\pi(x) = \dot{\phi}^\dagger(x)$ と $\pi^\dagger(x) = \dot{\phi}(x)$ の関係がありました。

$$\begin{cases} [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = [\phi^\dagger(t, \vec{x}), \pi^\dagger(t, \vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{x}')] = [\phi(t, \vec{x}), \phi^\dagger(t, \vec{x}')] = [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] \\ \quad = [\pi(t, \vec{x}), \pi^\dagger(t, \vec{x}')] = [\phi(t, \vec{x}), \pi^\dagger(t, \vec{x}')] = 0 \end{cases} \quad (4)$$

演算子を表すハットは省略しています。また，場の量 ϕ や π は連続量なので， δ 関数を使って交換関係を表しています。

次に，場 ϕ を Fourier 変換します。

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [a(\vec{k}) \exp(-ikx) + b^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx)] \quad (5)$$

この式のエルミート共役をとると，

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [b(\vec{k}) \exp(-ikx) + a^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx)]$$

です。演算子 b が導入されましたので， ϕ は実の場ではないことがわかります。ここで，展開係数 $a, a^\dagger, b, b^\dagger$ はエルミート演算子で，次の交換関係が

成立します。

$$\left\{ \begin{array}{l} [a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^+(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b(\vec{k}')] \\ \quad = [b^+(\vec{k}), b^+(\vec{k}')] = [a^+(\vec{k}), b(\vec{k}')] = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

交換関係(6)式が成立することを確認するために、場 ϕ を Fourier 変換した(5)式をもとの同時刻交換関係(4)式の左辺に代入して、(6)式を使って(5)式が成立することを確認めます。

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] &= [\phi(t, \vec{x}), \dot{\phi}^+(t, \vec{x}')] \\ &= \left[\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [a(\vec{k}) \exp(-ikx) \right. \\ &\quad \left. + b^+(\vec{k}) \exp(ikx)], \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [b(\vec{k}) \exp(-ikx) \right. \\ &\quad \left. + a^+(\vec{k}) \exp(ikx)] \right] \\ &= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} [a(\vec{k}) \exp\{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\} \\ &\quad + b^+(\vec{k}) \exp\{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\}, -i\omega' b(\vec{k}') \exp\{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\} \\ &\quad + i\omega' a^+(\vec{k}') \exp\{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\}] \\ &= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} \{i\omega' [a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] \exp\{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\} \\ &\quad \exp\{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\} \\ &\quad - i\omega' [b^+(\vec{k}), b(\vec{k}')] \exp\{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\} \exp\{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} \{i\omega'\delta(\vec{k} \\
& - \vec{k}') \exp\{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\} \exp\{i(\omega't - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\} \\
& - i\omega'\{-\delta(\vec{k} - \vec{k}')\} \exp\{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\} \exp\{-i(\omega't - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\}\}
\end{aligned}$$

最後の式は、前 Section の実 Klein-Gordon 場の交換関係についての途中の計算式と全く同じです。したがって、以下、同じ計算により、

$$[\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

が導出されます。同様にして、(4)式の残りの全ての式も確かめることができます。

Hamiltonian を展開係数 a, a^+, b, b^+ で表してみましょう。Hamiltonian は、

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x \mathcal{H} \\
&= \int d^3x [\pi^+(x)\pi(x) + \{\nabla\phi^+(x)\}\{\nabla\phi(x)\} + m^2\phi^+(x)\phi(x)]
\end{aligned}$$

です。ここで、

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [a(\vec{k})\exp(-ikx) + b^+(\vec{k})\exp(ikx)] \quad (5)$$

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [b(\vec{k})\exp(-ikx) + a^+(\vec{k})\exp(ikx)]$$

でしたが,

$$kx = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

より,

$$\pi(x) = \dot{\phi}^+(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (-i\omega) [b(\vec{k})\exp(-ikx) - a^+(\vec{k})\exp(ikx)]$$

$$\nabla\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (i\vec{k}) [a(\vec{k})\exp(-ikx) - b^+(\vec{k})\exp(ikx)]$$

となります。上の Hamiltonian に代入して計算します。

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x [\pi^+(x)\pi(x) + \{\nabla\phi^+(x)\}\{\nabla\phi(x)\} + m^2\phi^+(x)\phi(x)] \\ &= \int d^3x \left[\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (i\omega) [-a(\vec{k})\exp(-ikx) \right. \\ &\quad \left. + b^+(\vec{k})\exp(ikx)] \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} (-i\omega') [b(\vec{k}')\exp(-ik'x) \right. \\ &\quad \left. - a^+(\vec{k}')\exp(ik'x)] + m^2\phi^+(x)\phi(x) \right] \\ &\quad + \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (-i\vec{k}) [-b(\vec{k})\exp(-ikx) \\ &\quad + a^+(\vec{k})\exp(ikx)] \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} (i\vec{k}') [a(\vec{k}')\exp(-ik'x) \\ &\quad - b^+(\vec{k}')\exp(ik'x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [b(\vec{k})\exp(-ikx) \\
& \quad + a^+(\vec{k})\exp(ikx)] \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} [a(\vec{k}')\exp(-ik'x) \\
& \quad + b^+(\vec{k}')\exp(ik'x)] \\
= & \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega 2\omega'}} \int d^3x(\omega\omega') [-a(\vec{k})b(\vec{k}') \exp\{-i(k+k')x\} \\
& \quad + a(\vec{k})a^+(\vec{k}') \exp\{-i(k-k')x\} \\
& \quad + b^+(\vec{k})b(\vec{k}') \exp\{i(k-k')x\} \\
& \quad - b^+(\vec{k})a^+(\vec{k}') \exp\{i(k+k')x\}] \\
& + \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega 2\omega'}} \int d^3x(\vec{k}\cdot\vec{k}') [-b(\vec{k})a(\vec{k}') \exp\{-i(k+k')x\} \\
& \quad + b(\vec{k})b^+(\vec{k}') \exp\{-i(k-k')x\} \\
& \quad + a^+(\vec{k})a(\vec{k}') \exp\{i(k-k')x\} \\
& \quad - a^+(\vec{k})b^+(\vec{k}') \exp\{i(k+k')x\}] \\
& +m^2 \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega 2\omega'}} \int d^3x [b(\vec{k})a(\vec{k}') \exp\{-i(k+k')x\} \\
& \quad + b(\vec{k})b^+(\vec{k}') \exp\{-i(k-k')x\} \\
& \quad + a^+(\vec{k})a(\vec{k}') \exp\{i(k-k')x\} \\
& \quad + a^+(\vec{k})b^+(\vec{k}') \exp\{i(k+k')x\}]
\end{aligned}$$

$(\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dx)$ の 1 次元の式より, 3 次元にして,
 $\delta(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) d^3\vec{x}$ が成立します.

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{\sqrt{2\omega 2\omega'}} (\omega\omega') [-a(\vec{k})b(\vec{k}')\delta(\vec{k} + \vec{k}') \exp\{-i(\omega + \omega')t\} \\
&\quad + a(\vec{k})a^+(\vec{k}')\delta(\vec{k} - \vec{k}') \exp\{-i(\omega - \omega')t\} \\
&\quad + b^+(\vec{k})b(\vec{k}')\delta(\vec{k} - \vec{k}') \exp\{i(\omega - \omega')t\} \\
&\quad - b^+(\vec{k})a^+(\vec{k}')\delta(\vec{k} + \vec{k}') \exp\{i(\omega + \omega')t\}] \\
&+ \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{\sqrt{2\omega 2\omega'}} (\vec{k} \cdot \vec{k}') [-b(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k} + \vec{k}') \exp\{-i(\omega + \omega')t\} \\
&\quad + b(\vec{k})b^+(\vec{k}')\delta(\vec{k} - \vec{k}') \exp\{-i(\omega - \omega')t\} \\
&\quad + a^+(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k} - \vec{k}') \exp\{i(\omega - \omega')t\} \\
&\quad - a^+(\vec{k})b^+(\vec{k}')\delta(\vec{k} + \vec{k}') \exp\{i(\omega + \omega')t\}] \\
&+ m^2 \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{\sqrt{2\omega 2\omega'}} [b(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k} + \vec{k}') \exp\{-i(\omega + \omega')t\} \\
&\quad + b(\vec{k})b^+(\vec{k}')\delta(\vec{k} - \vec{k}') \exp\{-i(\omega - \omega')t\} \\
&\quad + a^+(\vec{k})a(\vec{k}')\delta(\vec{k} - \vec{k}') \exp\{i(\omega - \omega')t\} \\
&\quad + a^+(\vec{k})b^+(\vec{k}')\delta(\vec{k} + \vec{k}') \exp\{i(\omega + \omega')t\}]
\end{aligned}$$

($\vec{k} = \pm\vec{k}'$ に加え, $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ より, $\omega = \omega'$ が成立します.)

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} \omega^2 [-a(\vec{k})b(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) + a(\vec{k})a^+(\vec{k}) + b^+(\vec{k})b(\vec{k}) \\
&\quad - b^+(\vec{k})a^+(-\vec{k}) \exp(2i\omega t)] \\
&+ \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} |\vec{k}|^2 [b(\vec{k})a(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) + b(\vec{k})b^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \\
&\quad + a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k}) \exp(2i\omega t)] \\
&+ m^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [b(\vec{k})a(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) + b(\vec{k})b^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \\
&\quad + a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k}) \exp(2i\omega t)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} \omega^2 [-b(\vec{k})a(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) + \{a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + \delta(0)\} \\
&\quad + \{b(\vec{k})b^+(\vec{k}) - \delta(0)\} - a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k}) \exp(2i\omega t)] \\
&\quad + \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} |\vec{k}|^2 [b(\vec{k})a(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) + b(\vec{k})b^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \\
&\quad + a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k}) \exp(2i\omega t)] \\
&\quad + m^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [b(\vec{k})a(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) + b(\vec{k})b^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \\
&\quad + a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k}) \exp(2i\omega t)] \\
&= \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [(-\omega^2 + |\vec{k}|^2) b(\vec{k})a(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) + (\omega^2 + |\vec{k}|^2) a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \\
&\quad + (\omega^2 + |\vec{k}|^2) b(\vec{k})b^+(\vec{k}) + (-\omega^2 \\
&\quad + |\vec{k}|^2) a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k}) \exp(2i\omega t)] \\
&\quad + m^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [b(\vec{k})a(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) + b(\vec{k})b^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \\
&\quad + a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k}) \exp(2i\omega t)] \\
&= \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [-m^2 b(\vec{k})a(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) + (2\omega^2 - m^2) a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + (2\omega^2 \\
&\quad - m^2) b(\vec{k})b^+(\vec{k}) - m^2 a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k}) \exp(2i\omega t)] \\
&\quad + m^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [b(\vec{k})a(-\vec{k}) \exp(-2i\omega t) + b(\vec{k})b^+(\vec{k}) + a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \\
&\quad + a^+(\vec{k})b^+(-\vec{k}) \exp(2i\omega t)] \\
&= \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [2\omega^2 \{a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + b(\vec{k})b^+(\vec{k})\}]
\end{aligned}$$

$$= \int d^3 \vec{k} \omega [a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + \{b^+(\vec{k})b(\vec{k}) + \delta(0)\}]$$

最後の定数項は、前 Section のときと同様にして、0 にすることができます。したがって、Hamiltonian は、

$$H = \int d^3 \vec{k} \omega \{a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + b^+(\vec{k})b(\vec{k})\}$$

となります。

QFT02-5 実 Klein-Gordon Propagator

QFT02-6 複素 Klein-Gordon Propagator

QFT03 Dirac 場 (Spinor 場)

QFT03-1 Dirac 場の古典論

特殊相対論的量子力学の方程式である Dirac 方程式は、次の式で与えられます。

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

ここで,

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

です。 γ は 4×4 の行列でガンマ行列といい、 σ は 2×2 の行列で Pauli 行列です。 また、 m は質量です。

対応する Lagrangian 密度は,

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)$$

です。 ただし、 Minkowski 共役な場,

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$$

を導入しました。この Lagrangian 密度を Euler-Lagrange 方程式,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

に代入すると、確かに Dirac 方程式が導出されることを確認しておきましょう。Euler-Lagrange 方程式の ϕ は、この場合、 $\bar{\psi}$ に置き換えます。まず、第 1 項は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)$$

となります。次に、第 2 項は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0$$

となります。したがって、Euler-Lagrange 方程式は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) + 0 = 0$$

$$\therefore (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

となります。確かに、Dirac 方程式が導かれました。

Hamiltonian 密度も求めておきましょう。一般化運動量 π は、

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}(x)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}(x)} \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x)$$

$$= \bar{\psi} \cdot i\gamma^0$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \cdot i\gamma^0$$

ここで,

$$\gamma^0 \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

となるので,

$$\pi(x) = i\psi^\dagger \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$= i\psi^\dagger(x)$$

となります。したがって, Hamiltonian 密度は,

$$\mathcal{H}(x) = \pi(x) \dot{\psi}(x) - \mathcal{L}(x)$$

$$= i\psi^\dagger \dot{\psi} - \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x)$$

$$= i\psi^\dagger \dot{\psi} - \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - m) \psi \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$= i\psi^\dagger \dot{\psi} - i\psi^\dagger \dot{\psi} + \psi^\dagger \gamma^0 (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi$$

(Dirac 方程式 $(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - m)\psi = 0$ より、)

$$= \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^0 \partial_0 \psi)$$

$$= \psi^\dagger i \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

と導かれます。

QFT03-2 Dirac 場の正準量子化

量子論ではオブザーバブルは演算子で表されることとなります。Dirac 場 ψ を演算子に格上げした瞬間に、場の量子化が実行されたこととなります。この際、演算子は積の順序が問題となりますので、交換関係を設定することとなります。このような交換関係による量子化のことを正準量子化といいます。ただし、Dirac 場が記述するのは Fermion なので反交換関係を設定しなければなりません。Dirac 場 ψ とその一般化運動量 π の間に次の同時刻反交換関係を設定します。

$$\begin{cases} \{\psi_i(t, \vec{x}), \pi_j(t, \vec{x}')\} = i\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta_{ij} \\ \{\psi_i(t, \vec{x}), \psi_j(t, \vec{x}')\} = \{\pi_i(t, \vec{x}), \pi_j(t, \vec{x}')\} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

ただし、反交換子は、

$$\{A, B\} \equiv AB + BA$$

で定義されます。演算子を表すハットは省略しました。また、場の量 ψ や π は連続量なので、 δ 関数を使って反交換関係を表しています。

次に、場 ψ を Fourier 変換します。

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{\omega}} \sum_{\sigma=\pm 1} [c(\vec{k}, \sigma) u(\vec{k}, \sigma) \exp(-ikx) + d^+(\vec{k}, \sigma) v(\vec{k}, \sigma) \exp(ikx)] \quad (2)$$

σ は電子のスピン自由度を表します。また、単に x や k と書いているのは、

$$x = x^\mu = (t, \vec{x})$$

$$p = p^\mu = (E, \vec{p}) = k = k^\mu = (\omega, \vec{k})$$

を意味します。したがって、 kx の表記で、

$$kx = \eta_{\mu\nu} k^\mu x^\nu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

を表します。また、 ω と \vec{k} の間には、特殊相対性理論の要請より、

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\vec{p}|^2 = k^2 = k^\mu k_\mu = \omega^2 - |\vec{k}|^2 = m^2$$

の関係が成立します。これを、On-shell 条件といいます。このとき、

$$\omega = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$$

となります。Minkowski 共役な場合は、

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{\omega}} \sum_{\sigma=\pm 1} [c^+(\vec{k}, \sigma) \bar{u}(\vec{k}, \sigma) \exp(ikx) + d(\vec{k}, \sigma) \bar{v}(\vec{k}, \sigma) \exp(-ikx)]$$

となります。ここで、展開係数 c, c^+, d, d^+ はエルミート演算子で、次の反交換関係が成立します。

$$\begin{cases} \{c(\vec{k}, \sigma), c^+(\vec{k}', \sigma')\} = \{d(\vec{k}, \sigma), d^+(\vec{k}', \sigma')\} = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\sigma\sigma'} \\ \{c(\vec{k}, \sigma), c(\vec{k}', \sigma')\} = \{d(\vec{k}, \sigma), d(\vec{k}', \sigma')\} = \{c(\vec{k}, \sigma), d(\vec{k}', \sigma')\} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

反交換関係(3)式が成立することを確認するために、場 ϕ を Fourier 変換した(2)式をもとの同時刻反交換関係(1)式の左辺に代入して、(3)式を使って(1)式が成立することを確認めます。

$$\begin{aligned} \{\psi_i(t, \vec{x}), \pi_j(t, \vec{x}')\} &= \{\psi_i(t, \vec{x}), i\psi_j^\dagger(t, \vec{x}')\} \\ &= i \left\{ \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{\omega}} \sum_{\sigma=\pm 1} [c(\vec{k}, \sigma) u_i(\vec{k}, \sigma) \exp(-ikx) + d^+(\vec{k}, \sigma) v_i(\vec{k}, \sigma) \exp(ikx)], \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{\omega'}} \sum_{\sigma'=\pm 1} [c^+(\vec{k}', \sigma') u_j^\dagger(\vec{k}', \sigma') \exp(ik'x') + d(\vec{k}', \sigma') v_j^\dagger(\vec{k}', \sigma') \exp(-ik'x')] \right\} \\ &= \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{im}{\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\sigma, \sigma'} \{c(\vec{k}, \sigma) u_i(\vec{k}, \sigma) \exp(-ikx) + d^+(\vec{k}, \sigma) v_i(\vec{k}, \sigma) \exp(ikx), c^+(\vec{k}', \sigma') u_j^\dagger(\vec{k}', \sigma') \exp(ik'x') + d(\vec{k}', \sigma') v_j^\dagger(\vec{k}', \sigma') \exp(-ik'x')\} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{\text{im}}{\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\sigma,\sigma'} [u_i(\vec{k}, \sigma)u_j^\dagger(\vec{k}', \sigma')\{c(\vec{k}, \sigma), c^\dagger(\vec{k}', \sigma')\} \exp\{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\} \exp\{i(\omega't - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\} + v_i(\vec{k}, \sigma)v_j^\dagger(\vec{k}', \sigma')\{d^\dagger(\vec{k}, \sigma), d(\vec{k}', \sigma')\} \exp\{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\} \exp\{-i(\omega't - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\}]$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{\text{im}}{\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\sigma,\sigma'} [u_i(\vec{k}, \sigma)u_j^\dagger(\vec{k}', \sigma')\delta(\vec{k} - \vec{k}')\delta_{\sigma\sigma'} \exp\{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\} \exp\{i(\omega't - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\} + v_i(\vec{k}, \sigma)v_j^\dagger(\vec{k}', \sigma')\delta(\vec{k} - \vec{k}')\delta_{\sigma\sigma'} \exp\{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})\} \exp\{-i(\omega't - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\}]$$

($\vec{k} = \vec{k}'$ に加え, $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ より, $\omega = \omega'$ も成立します.)

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\text{im}}{\omega} \sum_{\sigma} [u_i(\vec{k}, \sigma)u_j^\dagger(\vec{k}, \sigma) \exp\{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')\} + v_i(\vec{k}, \sigma)v_j^\dagger(\vec{k}, \sigma) \exp\{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')\}]$$

(柏太郎著“演習場の量子論”サイエンス社

p41 (2.94)(2.95)式より)

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\text{im}}{\omega} \left[\frac{1}{2m} \begin{pmatrix} \omega + m & \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & \omega - m \end{pmatrix}_{ij} \exp\{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')\} + \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} \omega - m & \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & \omega + m \end{pmatrix}_{ij} \exp\{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')\} \right]$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{im}{\omega} \left[\frac{1}{2m} \begin{pmatrix} \omega + m & \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & \omega - m \end{pmatrix}_{ij} \exp\{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')\} \right. \\ \left. + \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} \omega - m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} & \omega + m \end{pmatrix}_{ij} \exp\{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')\} \right]$$

$$= i \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij} \exp\{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')\}$$

$$(\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dk \text{ の 1次元の式より, 3次元にして,} \\ \delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{k} \text{ が成立します.})$$

$$= i\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta_{ij}$$

同様にして, (1)式の残りの2式も確かめることができます.

Hamiltonian を展開係数 c, c^+, d, d^+ で表してみましよう. Hamiltonian は,

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \\ = \int d^3x \cdot \psi^\dagger i \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

です. ここで,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{\omega}} \sum_{\sigma=\pm 1} [c(\vec{k}, \sigma) u(\vec{k}, \sigma) \exp(-ikx) \\ + d^+(\vec{k}, \sigma) v(\vec{k}, \sigma) \exp(ikx)] \quad (2)$$

において, エルミート共役をとると,

$$\psi^+(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{\omega}} \sum_{\sigma=\pm 1} [c^+(\vec{k}, \sigma) u^+(\vec{k}, \sigma) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) + d(\vec{k}, \sigma) v^+(\vec{k}, \sigma) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})]$$

となります。上の Hamiltonian に代入して計算します。

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} \cdot \psi^+(\mathbf{x}) i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}) \\ &= \int d^3\mathbf{x} \cdot \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{\omega}} \sum_{\sigma=\pm 1} [c^+(\vec{k}, \sigma) u^+(\vec{k}, \sigma) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) + d(\vec{k}, \sigma) v^+(\vec{k}, \sigma) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})] i \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{\omega'}} \sum_{\sigma'=\pm 1} [c(\vec{k}', \sigma') u(\vec{k}', \sigma') \exp(-i\mathbf{k}'\mathbf{x}) + d^+(\vec{k}', \sigma') v(\vec{k}', \sigma') \exp(i\mathbf{k}'\mathbf{x})] \\ &= i \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\sigma\sigma'} [c^+(\vec{k}, \sigma) u^+(\vec{k}, \sigma) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) + d(\vec{k}, \sigma) v^+(\vec{k}, \sigma) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})] \\ &\quad \times [(-i\omega') c(\vec{k}', \sigma') u(\vec{k}', \sigma') \exp(-i\mathbf{k}'\mathbf{x}) + (i\omega') d^+(\vec{k}', \sigma') v(\vec{k}', \sigma') \exp(i\mathbf{k}'\mathbf{x})] \\ &= \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{m\omega'}{\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\sigma\sigma'} [c^+(\vec{k}, \sigma) u^+(\vec{k}, \sigma) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) + d(\vec{k}, \sigma) v^+(\vec{k}, \sigma) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})] \\ &\quad \times [c(\vec{k}', \sigma') u(\vec{k}', \sigma') \exp(-i\mathbf{k}'\mathbf{x}) - d^+(\vec{k}', \sigma') v(\vec{k}', \sigma') \exp(i\mathbf{k}'\mathbf{x})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \int d^3x \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{m\omega'}{\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\sigma\sigma'} [c^+(\vec{k}, \sigma)c(\vec{k}', \sigma')u^+(\vec{k}, \sigma)u(\vec{k}', \sigma') \exp\{i(\omega \\
& - \omega')t\} \exp\{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}\} \\
& - c^+(\vec{k}, \sigma)d^+(\vec{k}', \sigma')u^+(\vec{k}, \sigma)v(\vec{k}', \sigma') \exp\{i(\omega \\
& + \omega')t\} \exp\{-i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}\} \\
& + d(\vec{k}, \sigma)c(\vec{k}', \sigma')v^+(\vec{k}, \sigma)u(\vec{k}', \sigma') \exp\{-i(\omega \\
& + \omega')t\} \exp\{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}\} \\
& - d(\vec{k}, \sigma)d^+(\vec{k}', \sigma')v^+(\vec{k}, \sigma)v(\vec{k}', \sigma') \exp\{-i(\omega \\
& - \omega')t\} \exp\{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}\}]
\end{aligned}$$

($\delta(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})d\vec{x}$ の 1 次元の式より, 3 次元にして,
 $\delta(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})d^3\vec{x}$ が成立します.)

$$\begin{aligned}
= & \int d^3\vec{k}d^3\vec{k}' \frac{m\omega'}{\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\sigma\sigma'} [c^+(\vec{k}, \sigma)c(\vec{k}', \sigma')u^+(\vec{k}, \sigma)u(\vec{k}', \sigma') \exp\{i(\omega \\
& - \omega')t\} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\
& - c^+(\vec{k}, \sigma)d^+(\vec{k}', \sigma')u^+(\vec{k}, \sigma)v(\vec{k}', \sigma') \exp\{i(\omega + \omega')t\} \delta(\vec{k} \\
& + \vec{k}') \\
& + d(\vec{k}, \sigma)c(\vec{k}', \sigma')v^+(\vec{k}, \sigma)u(\vec{k}', \sigma') \exp\{-i(\omega + \omega')t\} \delta(\vec{k} \\
& + \vec{k}') \\
& - d(\vec{k}, \sigma)d^+(\vec{k}', \sigma')v^+(\vec{k}, \sigma)v(\vec{k}', \sigma') \exp\{-i(\omega \\
& - \omega')t\} \delta(\vec{k} - \vec{k}')]
\end{aligned}$$

($\vec{k} = \pm\vec{k}'$ に加え, $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ より, $\omega = \omega'$ が成立しま
す.)

$$\begin{aligned}
= & \int d^3\vec{k} \cdot m \sum_{\sigma\sigma'} [c^+(\vec{k}, \sigma)c(\vec{k}, \sigma')u^+(\vec{k}, \sigma)u(\vec{k}, \sigma') \\
& - c^+(\vec{k}, \sigma)d^+(\vec{k}, \sigma')u^+(\vec{k}, \sigma)v(\vec{k}, \sigma') \exp(2i\omega t) \\
& + d(\vec{k}, \sigma)c(\vec{k}, \sigma')v^+(\vec{k}, \sigma)u(\vec{k}, \sigma') \exp(-2i\omega t) \\
& - d(\vec{k}, \sigma)d^+(\vec{k}, \sigma')v^+(\vec{k}, \sigma)v(\vec{k}, \sigma')]
\end{aligned}$$

(柏太郎著“演習場の量子論”サイエンス社

p41 (2.91)(2.92)式より)

$$\begin{aligned} &= \int d^3 \vec{k} \cdot m \sum_{\sigma\sigma'} [c^+(\vec{k}, \sigma)c(\vec{k}, \sigma') \frac{\omega}{m} \delta_{\sigma\sigma'} - c^+(\vec{k}, \sigma)d^+(-\vec{k}, \sigma') \cdot 0 \\ &\quad \cdot \exp(2i\omega t) + d(\vec{k}, \sigma)c(-\vec{k}, \sigma') \cdot 0 \cdot \exp(-2i\omega t) \\ &\quad - d(\vec{k}, \sigma)d^+(\vec{k}, \sigma') \frac{\omega}{m} \delta_{\sigma\sigma'}] \\ &= \int d^3 \vec{k} \cdot \omega \sum_{\sigma} [c^+(\vec{k}, \sigma)c(\vec{k}, \sigma) - d(\vec{k}, \sigma)d^+(\vec{k}, \sigma)] \\ &= \int d^3 \vec{k} \cdot \omega \sum_{\sigma} [c^+(\vec{k}, \sigma)c(\vec{k}, \sigma) + d^+(\vec{k}, \sigma)d(\vec{k}, \sigma) + \delta(0)] \end{aligned}$$

ここで、第3項はデルタ関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{k}) \delta(\vec{k} - \vec{k}') dx = f(\vec{k}')$$

より、 $\vec{k} = 0$ のときの ω の値が出てくることになります。

$$\begin{aligned} \int d^3 \vec{k} \omega \sum_{\sigma} \delta(0) &= \int d^3 \vec{k} \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \cdot 2\delta(0) \\ &= 2\sqrt{0^2 + m^2} \\ &= 2m \end{aligned}$$

これは定数なので、エネルギー軸の原点をずらして0にすることができま

す。したがって, Hamiltonian は,

$$H = \int d^3 \vec{k} \cdot \omega \sum_{\sigma} [c^+(\vec{k}, \sigma)c(\vec{k}, \sigma) + d^+(\vec{k}, \sigma)d(\vec{k}, \sigma)]$$

で与えられることとなります。

QFT04 Maxwell 場 (Vector 場)

QFT04-1 Maxwell 場の古典論

特殊相対論的電磁気学の方程式である Maxwell 方程式は, 次の式で与えられます.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x)$$

ここで,

$$x = x^\mu = (t, \vec{x})$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

$$F^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$$

$$A^\mu(x) = (\phi(x), \vec{A}(x))$$

$$j^\mu(x) = (\rho(x), \vec{j}(x))$$

です. 対応する Lagrangian 密度は,

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - j^\mu A_\mu(x)$$

で与えられます. この Lagrangian 密度を Euler-Lagrange 方程式,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \right) = 0$$

に代入すると、確かに Maxwell 方程式が導出されることを確認しておきましょう。Euler-Lagrange 方程式の ϕ は、この場合、 A_μ に置き換えます。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) = 0$$

ここで、

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= F_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu - F_{\mu\nu} \partial^\nu A^\mu \end{aligned}$$

ですが、最後の式の第 2 項で添え字の μ, ν を入れ換えると、 $F_{\mu\nu}$ の反対称性より、

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \partial^\nu A^\mu &= F_{\nu\mu} \partial^\mu A^\nu \\ &= -F_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu \end{aligned}$$

となります。したがって、

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= 2F_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu \\ &= 2(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \partial^\mu A^\nu \end{aligned}$$

なので、与えた Lagrangian 密度は、

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \partial^\mu A^\nu - j^\mu A_\mu$$

と書き直すことができます。この Lagrangian 密度の第 1 項は、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \partial^\mu A^\nu &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \eta^{\rho\mu} \eta^{\sigma\nu} \partial_\rho A_\sigma \\ &= -\frac{1}{2}(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) \partial_\rho A_\sigma \\ &= -\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \partial_\nu A_\mu \end{aligned}$$

とも書き直すことができることにも注意しましょう。このとき、Euler-Lagrange 方程式、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) = 0$$

は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -j^\mu$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} &= -\frac{1}{2}(-\partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2}\partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ &= F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

より,

$$-j^\mu - \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

$$\therefore -j^\mu + \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0$$

$$\therefore \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

となります。確かに、Maxwell 方程式が導かれました。

次に、Source が無く、 $j^\nu = 0$ の場合を考えます。このとき、Lagrangian 密度は、

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \quad (1)$$

となり、真空中の Maxwell 方程式は、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0$$

となります。

(1)式の Lagrangian 密度はゲージ不変性をもっていますが、ゲージを固定するため、 α を任意定数として、

$$-\frac{1}{2\alpha} [\partial_\mu A^\mu(x)]^2$$

というゲージ固定項を手で加えます。このとき、Lagrangian 密度は、

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2\alpha}[\partial_\mu A^\mu(x)]^2 \quad (\text{qft04} - 1)$$

と、修正されます。ここで、 $\alpha=1$ という Feynman ゲージを選ぶと、

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}[\partial_\mu A^\mu(x)]^2 \quad (2)$$

となります。この(2)式の Lagrangian 密度について、一般化運動量を計算します。ここで、前述の式変形と同様に、

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2}[\partial_\mu A^\mu(x)]^2$$

と書き直すことができます。さらに、この式の右辺第1項は、前述の式変形と同様に、

$$-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \partial^\mu A^\nu = -\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \partial_\nu A_\mu$$

とも書き直すことができることにも注意しましょう。また、右辺第2項を、

$$-\frac{1}{2}\partial^\mu A_\mu(x) \partial^\nu A_\nu(x)$$

と変形しておきます。したがって、一般化運動量の時間成分は、

$$\begin{aligned} \pi^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} \\ &= -\frac{1}{2}\partial^0 A^0 - \frac{1}{2}(-\partial^0 A^0) - \frac{1}{2}(\partial^0 A^0 - \partial^0 A^0) - \frac{1}{2}\partial^\nu A_\nu - \frac{1}{2}\partial^\mu A_\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\partial^\mu A_\mu \\
&= -(\partial^0, -\nabla) \cdot (A_0, -\vec{A}) \\
&= -\dot{A}_0 - \nabla \cdot \vec{A} \\
&= -\dot{A}^0 - \nabla \cdot \vec{A} \\
&= -\partial_\mu A^\mu
\end{aligned}$$

となります。空間成分は、

$$\begin{aligned}
\pi^i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} \quad (i = 1, 2, 3) \\
&= -\frac{1}{2} \partial^0 A^i - \frac{1}{2} (-\partial^i A^0) - \frac{1}{2} (\partial^0 A^i - \partial^i A^0) \\
&= \partial^i A^0 - \dot{A}^i
\end{aligned}$$

となります。

QFT04-2 Maxwell 場の正準量子化

量子論ではオブザーバブルは演算子で表されることとなります。Maxwell 場 A^μ を演算子に格上げした瞬間に、場の量子化が実行されたこととなります。この際、演算子は積の順序が問題となりますので、交換関係を設定することとなります。このような交換関係による量子化のことを正準量子化といいます。次の同時刻交換関係を設定します。

$$\begin{cases} [A^\mu(t, \vec{x}), \dot{A}^\nu(t, \vec{x}')] = -i\delta^{\mu\nu}\delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [A^\mu(t, \vec{x}), A^\nu(t, \vec{x}')] = [\dot{A}^\mu(t, \vec{x}), \dot{A}^\nu(t, \vec{x}')] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

演算子を表すハットは省略しました。また、場の量 A^μ や \dot{A}^μ は連続量なので、 δ 関数を使って交換関係を表しています。次に、場 A^μ を Fourier 変換します。

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \sum_{\lambda=0}^3 [a(\vec{k}, \lambda)\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda)\exp(-ikx) + a^\dagger(\vec{k}, \lambda)\epsilon^{\mu\dagger}(\vec{k}, \lambda)\exp(ikx)] \quad (4)$$

単に x や k と書いているのは、

$$x = x^\mu = (t, \vec{x})$$

$$p = p^\mu = (E, \vec{p}) = k = k^\mu = (\omega, \vec{k})$$

を意味します。したがって、 kx の表記で、

$$kx = \eta_{\mu\nu}k^\mu x^\nu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

を表します。また、 ω と \vec{k} の間には、特殊相対性理論の要請より、

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\vec{p}|^2 = k^2 = k^\mu k_\mu = \omega^2 - |\vec{k}|^2 = m^2$$

の関係が成立します。これを、On-shell 条件といいます。このとき、

$$\omega = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$$

となります。また、 ε は偏光ベクトルといい、4次元ミンコフスキー時空における基本単位ベクトル（基底ベクトル）です。 ε は、お互いに独立ならば自由に選択することができますが、簡単のため、 \vec{k} の向きが z 方向になるように基準系を設定して、

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon^\mu(\vec{k}, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon^\mu(\vec{k}, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon^\mu(\vec{k}, 3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします。このとき、光は z 方向に進んでいるとしたので、

$$k_\mu \varepsilon^\mu(\vec{k}, 1) = k_\mu \varepsilon^\mu(\vec{k}, 2) = 0$$

が成立します。すなわち、 $\lambda=1,2$ は横波成分を表します。そして、 $\lambda=3$ は縦波成分を、 $\lambda=0$ は時間成分を表します。上の具体的表式より、

$$\varepsilon^{\mu+}(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}$$

が成立します。例えば、

$$\varepsilon^{\mu+}(\vec{k}, 0) \varepsilon^\mu(\vec{k}, 0) = (1, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\varepsilon^{\mu+}(\vec{k}, 0) \varepsilon^\mu(\vec{k}, 1) = (1, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

等です。つまり、 ε は規格直交系を形成していることがわかります。さらに、

$$\sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon^{\mu+}(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^{\nu}(\vec{k}, \lambda) = \delta^{\mu\nu}$$

が成立します。具体的表式より、例えば、

$$\sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon^{0+}(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^0(\vec{k}, \lambda) = \varepsilon^{0+}(\vec{k}, 0) \varepsilon^0(\vec{k}, 0) + \dots + \varepsilon^{0+}(\vec{k}, 3) \varepsilon^0(\vec{k}, 3)$$

$$= 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0$$

$$= 1$$

$$= \delta^{00}$$

$$\sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon^{0+}(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^1(\vec{k}, \lambda) = \varepsilon^{0+}(\vec{k}, 0) \varepsilon^1(\vec{k}, 0) + \dots + \varepsilon^{0+}(\vec{k}, 3) \varepsilon^1(\vec{k}, 3)$$

$$= 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0$$

$$= 0$$

$$= \delta^{01}$$

等です。上式は ε の完全性を表しています。展開係数 a, a^+ に目を向けましょう。これらはエルミート演算子で、次の交換関係が成立します。

$$\begin{cases} [a(\vec{k}, \lambda), a^+(\vec{k}', \lambda')] = -\delta^{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [a(\vec{k}, \lambda), a(\vec{k}', \lambda')] = [a^+(\vec{k}, \lambda), a^+(\vec{k}', \lambda')] = 0 \end{cases} \quad (5)$$

交換関係(5)式が成立することを確認するために、場 A^μ を Fourier 変換した(4)式をもとの同時刻交換関係(3)式の左辺に代入して、(5)式を使って(3)式が成立することを確認めます。以下、(3)式の第1式を計算します。

$$\begin{aligned} & [A^\mu(t, \vec{x}), \dot{A}^\nu(t, \vec{x}')] \\ &= \left[\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \sum_{\lambda=0}^3 [a(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \exp(-i\vec{k}\vec{x}) \right. \\ &+ a^+(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^{\mu+}(\vec{k}, \lambda) \exp(i\vec{k}\vec{x})], \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega'}} \sum_{\lambda'=0}^3 [a(\vec{k}', \lambda') \varepsilon^\nu(\vec{k}', \lambda') (-i\omega') \exp(-i\vec{k}'\vec{x}') \\ &+ a^+(\vec{k}', \lambda') \varepsilon^{\nu+}(\vec{k}', \lambda') (i\omega') \exp(i\vec{k}'\vec{x}')] \Big] \\ &= \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\lambda\lambda'} [[a(\vec{k}, \lambda), a^+(\vec{k}', \lambda')] \varepsilon^{\nu+}(\vec{k}', \lambda') \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) (i\omega') \exp\{-i(\omega t \\ &- \vec{k} \cdot \vec{x})\} \exp\{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\} \\ &+ [a^+(\vec{k}, \lambda), a(\vec{k}', \lambda')] \varepsilon^{\mu+}(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^\nu(\vec{k}', \lambda') (-i\omega') \exp\{i(\omega t - \vec{k} \\ &\cdot \vec{x})\} \exp\{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\}] \\ &= \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\lambda\lambda'} [\\ &\quad - \delta^{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} \\ &\quad - \vec{k}') \varepsilon^{\nu+}(\vec{k}', \lambda') \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) (i\omega') \exp\{-i(\omega t - \vec{k} \\ &\quad \cdot \vec{x})\} \exp\{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\} + \delta^{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} \\ &\quad - \vec{k}') \varepsilon^{\mu+}(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^\nu(\vec{k}', \lambda') (-i\omega') \exp\{i(\omega t - \vec{k} \\ &\quad \cdot \vec{x})\} \exp\{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x}')\}] \end{aligned}$$

($\vec{k} = \vec{k}'$ に加え, $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ より, $\omega = \omega'$ も成立します.)

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{\lambda} [-\varepsilon^{\nu+}(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^{\mu}(\vec{k}, \lambda) (i\omega) \exp\{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')\} + \varepsilon^{\mu+}(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^{\nu}(\vec{k}, \lambda) (-i\omega) \exp\{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')\}]$$

($\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dk$ の 1 次元の式より, 3 次元にして,
 $\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{k}$ が成立します. さらに前述の,
 $\sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon^{\mu+}(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^{\nu}(\vec{k}, \lambda) = \delta^{\mu\nu}$ を利用します.)

$$= \frac{1}{2\omega} \{-\delta^{\mu\nu} (i\omega) \delta(\vec{x} - \vec{x}') + \delta^{\mu\nu} (-i\omega) \delta(\vec{x} - \vec{x}')\}$$

$$= -i\delta^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

確かに, (3)式の第 1 式が導かれました. 第 2 式, 第 3 式も同様に導くことができます.