

# Report 相对性理論 JS0.5

J Simplicity

November 11, 2011

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

## Abstract

相対性理論は 20 世紀の初頭、アインシュタインによって創始されました。ニュートンの力学においては、時間と空間は絶対的な存在であり、またそれぞれ独立したものであると考えられていました。しかし、アインシュタインは時間と空間は相対的なものであり、また 4 次元時空として関連付けられる存在であることを明らかにしました。

相対性理論は特殊相対性理論と一般相対性理論からなります。特殊相対性理論では、それぞれの座標系がお互いに等速直線運動で関係付けられているのに対して、一般相対性理論では、重力を含んだ理論で、それぞれの座標系が任意の運動をしていて文字通り一般化されています。アインシュタインの相対性理論は 20 世紀における物理学の革命です。その独特の考え方を見ていくことにしましょう。

# Contents

<b>I</b>	<b>特殊相対性理論</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>特殊相対性原理と光速不変の原理</b>	<b>5</b>
1.1	ニュートン力学（絶対空間・絶対時間， そしてガリレイ変換とガリレイの相対性原理）	5
1.2	マクスウェル電磁気学 （新しい座標変換と新しい相対性原理の可能性）	9
1.3	マイケルソン-モーレイの実験 （絶対空間・エーテルの概念の破棄から相対的な空間へ）	12
1.4	特殊相対性原理と光速不変の原理	15
1.5	同時性の問題 （絶対時間の概念の破棄から相対的な時間へ）	16
<b>2</b>	<b>ローレンツ変換とミンコフスキー時空</b>	<b>18</b>
2.1	慣性系とローレンツ変換	18
2.2	ローレンツ変換の導出	19
2.3	ローレンツ変換とガリレイ変換の関係	23
2.4	4次元時空と世界点・世界線	25
2.5	ローレンツ変換の2次元時空図	26
2.6	インターバルとミンコフスキー時空	28
2.7	ミンコフスキー時空の分類	29
<b>3</b>	<b>特殊相対性理論の世界</b>	<b>32</b>
3.1	同時性の問題	32
3.2	時間の遅れ	35
3.3	双子のパラドックス	40
3.4	空間の収縮（ローレンツ収縮）	42

3.5	速度の合成則 . . . . .	45
<b>4</b>	<b>ローレンツ不変性とローレンツ共変性</b>	<b>49</b>
4.1	数学的アナロジー (3次元デカルト座標における回転座標変換) . . . . .	49
4.2	ローレンツ変換の4次元定式化 . . . . .	52
4.3	インターバルのローレンツ不変性 . . . . .	56
4.4	スカラー, ベクトル, テンソル . . . . .	59
4.5	ローレンツ共変性 . . . . .	60
<b>5</b>	<b>特殊相対論的電磁気学</b>	<b>63</b>
5.1	マクスウェル電磁気学 . . . . .	63
5.2	マクスウェル電磁気学の特殊相対論的書き換え . . . . .	64
<b>6</b>	<b>特殊相対論的力学</b>	<b>68</b>
6.1	ニュートン力学 . . . . .	68
6.2	固有時間 . . . . .	69
6.3	特殊相対論的力学のローレンツ共変性 . . . . .	69
6.4	ローレンツ不変量 . . . . .	70

# **Part I**

## **特殊相对性理論**

# Chapter 1

## 特殊相対性原理と光速不変の原理

### 1.1 ニュートン力学（絶対空間・絶対時間， そしてガリレイ変換とガリレイの相対性原理）

19世紀までの物理学は、ニュートン力学とマクスウェル電磁気学から構成されていました。特殊相対性理論はこの2つの物理学を土壌として、20世紀初頭にアインシュタインによって創始されたのです。（論文として発表されたのは、1905年です。この年は、“奇跡の年”と呼ばれています。）このSectionでは、ニュートン力学について再考しておきます。特殊相対性理論は物理学の革命であり、ニュートン力学において根底となっている時間と空間に対する大前提は変更を余儀なくされました。その経緯を、このChapter全体にわたって詳細に見ていきましょう。まず、ニュートンの3法則を改めて書き留めておきます。

- 第1法則（慣性の法則）“力が働かないか、つりあっているとき、静止している物体は静止を続け、動いている物体は等速直線運動を続けます。”
- 第2法則（運動の法則）“力が働くとき、物体には力の向きに加速度が生じます。加速度の大きさは、力の大きさに比例し、質量に反比例します。（数式で表現したものが運動方程式です。）”
- 第3法則（作用・反作用の法則）“物体Aから物体Bへ力（作用）が働くとき、物体Bから物体Aへ、大きさが等しく、向きが反対で、同一作用線上にある力（反作用）が働き返します。”

第3法則はここでは問題とせず、第1法則と第2法則について考えましょう。第2法則の運動方程式があれば、第1法則の慣性の法則は必要ないように思われます。（運動方程式に

において、力を0にすれば、加速度も0になり、静止または等速直線運動になります。)しかし、慣性の法則は、その座標系が慣性系というものであるか否かを判定する条件になっています。つまり、慣性系とは、慣性の法則が成立する座標系であると定義されるのです。実際に慣性系を設定することは、思ったよりも難しいものです。すぐに思い付く慣性系の候補として、地球上での摩擦の小さな水平な台の水平方向の運動が挙げられます。しかし、摩擦を完全に排除することはできませんし、地球自体が運動しています。ですから、この例は慣性系ではないのです。ここで、宇宙空間を考えましょう。宇宙空間では無重力です。(重力は遠距離力なので、宇宙空間でも完全に0にすることはできません。しかし、ここでは、それを無視して考えることにします。)無重力な宇宙空間を浮遊している物体は、確かに慣性の法則に従い、何の力も加えなくても等速直線運動を続けることになります。このときの座標系は、近似的に慣性系と見なすことができるでしょう。ここで、物理の常套手段である理想化を行い、完全な慣性系が宇宙にあるものとして、今後の議論を進めることにします。ある慣性系が1つ見つかったとしましょう。それに対して等速直線運動している新しい座標系では、働く慣性力は0です。また、もとの慣性系に対して、物体が静止または等速直線運動していれば、新しい座標系に対する物体の運動の状態も、静止、または等速直線運動になることがわかります。したがって、新しい座標系も慣性系ということになります。もとの慣性系に対する新しい慣性系の速度は、等速度である限り、向きと大きさは任意です。したがって、新しく考えられる慣性系は無限個存在します。強調して書き留めておきましょう。

- “一旦、理想化された慣性系が1つ見つければ、それに対して等速直線運動している無限個の座標系も慣性系になります。”

ここで、基本的な事項ですが、絶対と相対という言葉の意味を考えておきましょう。絶対という言葉は、何か基準になるものが存在する場合に使います。例えば、“地面を基準として、ビルの5階は20[m]の高さです。”と言った場合、地面からの高さというものは絶対的な量になります。それに対して、相対という言葉は、2つのものA、Bがあり、Aに対するBの量とか、逆にBに対するAの量というものを考える場合に使います。例えば、“ビルの3階に対する7階の高さは16[m]です。”と言った場合、3階に対する7階の高さという、あいたいする量を考えていますので、相対的な量ということになります。ここで、問題となるのが、慣性系は絶対的なものなのか？それとも、相対的なものなのか？ということです。言葉を変えて言うと、何か基準となる絶対的な慣性系が1つ存在していて、それに対して等速直線運動している無限個の慣性系が存在するのか？それとも、基準となる慣性系というものは存在せず、無限個の慣性系は、全て同等で、あいたいする存在なのか？ということです。結論を言うと、ニュートン力学では、慣性系には基準となる空間と時間



が存在するという大前提としています。お互いに等速直線運動する無限個の慣性系のうち、基準となる空間は絶対空間と言い、宇宙の重心を原点にとり、デカルト座標の  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸を無限に伸ばして設定します。そして、ニュートン力学での時間は絶対時間と言い、全ての慣性系で共通であり、無限の過去から無限の未来に向かって一様に流れるものです。ニュートン力学の前提として、絶対空間と絶対時間が設定された理由は、それが、誰もが当然と思っている空間と時間の概念だからでした。宇宙空間として基準となるものが1つだけ存在し、その入れ物の中で、唯一の時間が過去から未来に向かって流れているという描像は常識として受け入れやすいものです。

さて、ある慣性系  $S$  が見つかったとします。  $S$  は絶対空間でもよいですし、それに対して等速直線運動している無限個の慣性系のうちの1つでもよいです。その慣性系  $S$  の座標を  $(x, y, z)$ 、時間を  $t$  とします。慣性系  $S$  では、ニュートンの運動方程式、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

が成立します。ここで、 $S$  に対して、 $x$  の正の方向に速さ  $v$  で等速直線運動している慣性系  $S'$  を考えて、その座標を、 $(x', y', z')$ 、その時間を  $t'$  としましょう。(簡単のため、 $x$  方向にのみ運動しているとしました。また、 $t = t' = 0$  で2つの座標系の原点が重なっているとします。) このとき、 $t'$  と  $(x', y', z')$  の成分を  $t$  と  $(x, y, z)$  の成分で表すと、次のようになり

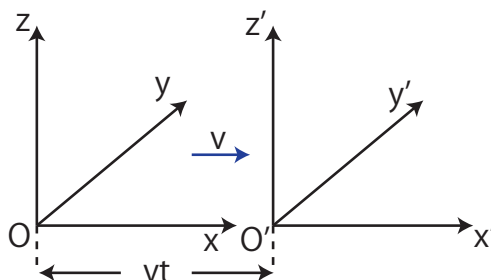


Figure 1.1: ガリレイ変換

ます。

$$t' = t$$

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

ニュートン力学では、時間は絶対時間ですから、2つの座標系で時間は共通になるとしました。(このことは、当然と思われるかもしれませんが、実は特殊相対性理論では変更され

ます。後の Section を見て下さい。)  $x$  成分は  $vt$  を引いています。これは、ダッシュの付く座標  $x'$  は、原点が  $vt$  だけ正の方向に動いた分、ダッシュの付かない座標  $x$  より、小さくなっているからです。  $y$  成分と  $z$  成分は、座標系が動いていませんので変わりません。以上のような座標変換のことをガリレイ変換と言います。ガリレイ変換において、空間成分を時間  $t = t'$  で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{dx'}{dt'} &= \frac{dx}{dt} - v \\ \frac{dy'}{dt'} &= \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz'}{dt'} &= \frac{dz}{dt}\end{aligned}$$

となります。もう 1 回、時間  $t = t'$  で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d^2x'}{dt'^2} &= \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y'}{dt'^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z'}{dt'^2} &= \frac{d^2z}{dt^2}\end{aligned}$$

となります。また、力  $F$  は絶対的な物理量であり、あたらしい慣性系でも同じであるとします。すなわち、

$$F' = F$$

です。慣性系  $S$  では、ニュートンの運動方程式、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

が成立しました。このとき、上の関係より、新しい座標系  $S'$  でも、運動方程式が成立することが確認されます。

$$m \frac{d^2x'}{dt'^2} = F'$$

このように、ある慣性系で物理法則が成立するとき、ガリレイ変換した別の慣性系でも同じ形式で物理法則が成立することを、ガリレイの相対性原理といいます。ニュートン力学では、ガリレイの相対性原理が成立することがわかりました。

ニュートン力学は、常識的な観点からも、ガリレイの相対性原理が成立する点から考えても、矛盾はなく、何の問題もないように思われます。次に、マクスウェル電磁気学を考えていきましょう。

## 1.2 マクスウェル電磁気学

### (新しい座標変換と新しい相対性原理の可能性)

19世紀までの物理学のもう一つの柱であるマクスウェル電磁気学について考察していくことにしましょう。簡単な電磁気学的現象例を取り上げると、コイルと棒磁石を使った電磁誘導の実験をする際、その相対的な運動のみが問題となります。つまり、コイルが静止していて棒磁石が動いていても、棒磁石が静止していてコイルが動いていても、その差異は認められません。すなわち、空間とは相対的なものではないのでしょうか？それとも、絶対空間が存在するのでしょうか？また、時間についてはどのようなことが言えるのでしょうか？議論を始めましょう。電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式とは、次の4式でした。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) &= \frac{\rho(t, \vec{x})}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= 0 \\ \nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t} &= \mu_0 \vec{j}(t, \vec{x}) \\ \nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

ここで、電荷密度  $\rho(t, \vec{x})$  と電流密度  $\vec{j}(t, \vec{x})$  が 0 であるような真空の空間領域を考えると、マクスウェル方程式は次のようになります。

$$\nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = 0 \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t} = 0 \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} = 0 \tag{1.4}$$

これらの真空中でのマクスウェル方程式から、まず、電場  $\vec{E}$  の満たす方程式を導きます。(1.4)式に左から  $\nabla \times$  をかけます。(回転をとります。)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x})) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x})) = 0$$

ここで、ベクトル解析の公式、

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

より,

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x})) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x})) - \nabla^2 \vec{E}(t, \vec{x}) \\ &= -\nabla^2 \vec{E}(t, \vec{x})\end{aligned}$$

となります. 最後の変形は (1.1) 式を用いました. さらに, (1.3) 式より,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x})) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t^2}$$

ですから,  $\vec{E}(t, \vec{x})$  の満たす方程式は,

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{E}(t, \vec{x}) \quad (1.5)$$

となります. 同様な計算により, 磁束密度  $\vec{B}(t, \vec{x})$  の満たす方程式は,

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{B}(t, \vec{x}) \quad (1.6)$$

となることが確かめられます. (1.5) 式と (1.6) は, 3次元波動方程式,

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(t, \vec{x})}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi(t, \vec{x})$$

と同形になっていることに注意しましょう. ここで,  $\psi(t, \vec{x})$  は波動のもつ一般量 (水波の場合は変位を表します. 今の場合は電場  $\vec{E}(t, \vec{x})$  や磁場  $\vec{B}(t, \vec{x})$  になります.),  $v$  は波動の速さを表します. つまり, 電場と磁場は波動として, 空間を伝搬する性質をもっていることが理解されます. そして, 電場と磁場の波動を電磁波と名付けたのでしたね. このとき, 電磁波の速さ  $c$  は,

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

より,

$$\begin{aligned}c &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \\ &\cong \frac{1}{\sqrt{8.8541878 \times 10^{-12} [F \cdot m^{-1}] \times 4\pi (= 3.14159265) \times 10^{-7} [N \cdot A^{-2}]}} \\ &\cong 2.9979 \times 10^8 [m/s]\end{aligned}$$

となります. これが光速と一致することから, 光は電磁波の一種であることが判明したのでした.

ここで問題となるのが, この光速  $c$  はどの慣性系から観測されたものであるかということです. 基準となる慣性系である絶対空間から測定されるものとしてみましょう. ニュートン力学ではガリレイの相対性原理が成立しましたので, 絶対空間に対して, 等速直線運

動している慣性系についても、運動方程式が成立しました。しかし、マクスウェル電磁気学に対してもガリレイ変換を適用しようとする、絶対空間に対する光速  $c$  は、新しい慣性系に対しては光速は  $c$  ではなくってまいります。マクスウェル方程式の結論である波動方程式 (1.5) 式と (1.6) 式では、光速は唯一  $c$  です。したがって、マクスウェル方程式は、ガリレイ変換に対して成立しないという結論になります。言葉を換えて言うと、マクスウェル電磁気学に対しては、ガリレイの相対性原理が成り立たないのです。マクスウェル電磁気学が成立するのは、絶対空間に対してのみとなります。マクスウェル電磁気学の結論である電磁波の存在によって、空間には電磁波を伝搬する媒質が必要でした。星の光が宇宙空間を隔てて届くことからわかるように、電磁波は真空中でも伝わります。そこで、考え出されたのがエーテルと呼ばれる媒質です。エーテルは物質の運動を妨げることはありませんが、電磁波を伝搬する媒質としての性質をもったもので、全宇宙の重心を基準とした絶対空間に対して静止し、空气中、物質中、真空中を問わず、満ち溢れているものと考えられました。上の議論で、光速  $c$  は絶対空間に対する速さということでしたが、ということは、絶対空間の中で静止しているエーテルに対するものだけということになります。

しかしながら、絶対空間とその中に静止しているエーテルに対してのみ成立する電磁気学は、美しさの点から承認しがたいものがあります。全ての慣性系で成立する電磁気学の可能性を考えなくてはなりません。マクスウェル方程式が、ガリレイ変換に対して成立しないのならば、新しい座標変換、新しい相対性原理を考えることはできないのでしょうか。問題を整理しましょう。次の2つの立場が考えられます。

1. 基準となる絶対空間と唯一の絶対時間が存在します。絶対空間とそれに対して等速直線運動する無限個の慣性系に関するガリレイ変換を考えた場合、ニュートン力学についてはガリレイの相対性原理が成立します。また、マクスウェル電磁気学は、絶対空間に対して静止しているエーテルに対してのみ成立し、それ以外の慣性系では成立しません。つまり、マクスウェル電磁気学については、ガリレイの相対性原理が成立しません。(絶対空間に対して光速は  $c$  で、絶対空間に対して等速直線運動している慣性系に対しては、光速は変化します。)
2. マクスウェル電磁気学が全ての慣性系について成立するような、新しい座標変換が存在します。したがって、電磁波の波動方程式が全ての慣性系に対して成立するので、全ての慣性系に対して、光速は唯一  $c$  です。その場合、絶対空間とエーテルの存在は否定されます。また、新しい座標変換に対して、ニュートン力学が成立するか、否か、検討しなければなりません。

アインシュタインは後者の立場をとり、特殊相対性理論を創りました。その根拠となる実験を次の Section で見ていくことにしましょう。(ただし、アインシュタインは実験の結果

を知らなくても、理論の美しさの観点から同じ結論を見出したと思われます。)

### 1.3 マイケルソン-モーレイの実験

#### (絶対空間・エーテルの概念の破棄から相対的な空間へ)

ここで、絶対空間とエーテルの存在について決定的な判決を下したのが、1887年に行われたマイケルソン-モーレイの実験です。その当時、絶対空間の考え方が主流であったので、この実験は絶対空間に静止しているエーテルに対する地球の運動を検出することが当初の目的でした。以下の議論は絶対空間を想定して行いますので、混乱しないようにして下さい。実験装置は図のようになります。光源  $S$  から出た光の一部は、半透明の鏡  $M$  を通過

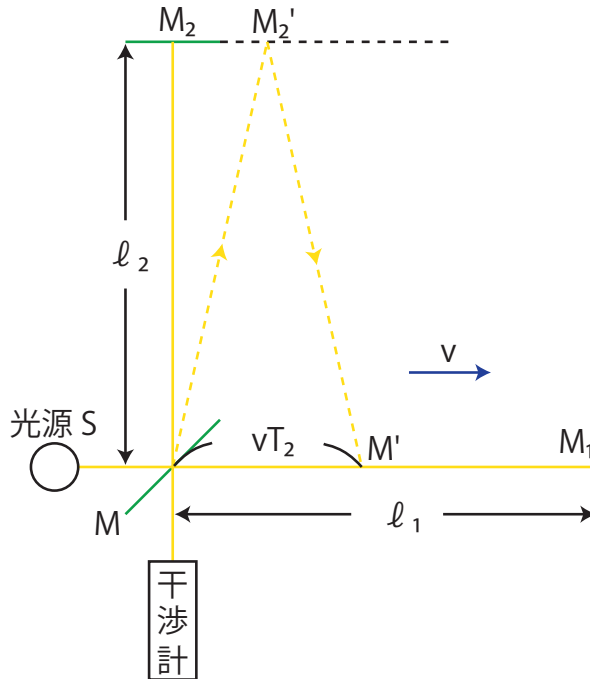


Figure 1.2: マイケルソン-モーレイの実験

して直進し、鏡  $M_1$  で反射されて再び  $M$  に戻り、ここで反射されて干渉計に入ります。また、光源  $S$  から出た光の残りは、半透明の鏡  $M$  により反射されて鏡  $M_2$  へ向かい、ここで  $M_2$  に反射されて再び  $M$  に戻り、 $M$  を通り抜けて干渉計に入ります。はじめの光を  $L_1$ 、あとの光を  $L_2$  と呼べば、 $L_1$  と  $L_2$  は干渉します。絶対空間に静止しているエーテルから見たとき、装置全体が  $MM_1$  の方向に地球とともに一定の速さ  $v$  で運動する場合を考えます。絶対空間では、光は全ての方向にエーテルに対して  $c$  の速さで伝わるはずですが、 $L_1$  の場合、行きの光の速さは  $c-v$  であり、帰りの光の速さは  $c+v$  になります。故に、

光が  $MM_1$  を往復する時間  $T_1$  は,

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\ell_1}{c-v} + \frac{\ell_1}{c+v} \\ &= \frac{\ell_1\{(c+v) + (c-v)\}}{(c-v)(c+v)} \\ &= \frac{2\ell_1 c}{c^2 - v^2} \\ \therefore T_1 &= \frac{2\ell_1/c}{1 - \beta^2} \end{aligned}$$

となります。ただし、 $\beta$  は,

$$\beta \equiv \frac{v}{c}$$

で定義します。 $L_2$  について言えば、装置全体の速度は  $MM_2$  方向については 0 なので、光の速さは  $c$  です。ただし、光の走った道筋は  $MM'_2M$  なので、そのとき経過した時間  $T_2$  は,

$$T_2 = \frac{2\sqrt{\ell_2^2 + \left(\frac{vT_2}{2}\right)^2}}{c}$$

より,

$$\begin{aligned} T_2^2 &= \frac{4\left(\ell_2^2 + \frac{v^2 T_2^2}{4}\right)}{c^2} \\ \therefore c^2 T_2^2 &= 4\ell_2^2 + v^2 T_2^2 \\ \therefore (c^2 - v^2) T_2^2 &= 4\ell_2^2 \\ \therefore T_2^2 &= \frac{4\ell_2^2}{c^2 - v^2} \\ \therefore T_2^2 &= \frac{4\ell_2^2/c^2}{1 - \beta^2} \\ \therefore T_2 &= \frac{2\ell_2/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

となります。よって、2つの光の時間差  $\Delta T$  は,

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{2\ell_1/c}{1 - \beta^2} - \frac{2\ell_2/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

となります。ここで、装置全体を、 $M$  を中心として時計回りに  $90^\circ$  回転して同じ実験をします。このとき、 $MM_2$  が地球の運動の向きに一致して、 $MM_1$  は運動の向きと垂直になります。したがって、この場合の時間差  $\Delta T'$  は,

$$\Delta T' = T'_1 - T'_2 = \frac{2\ell_1/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{2\ell_2/c}{1 - \beta^2}$$

と求められます。この2つの実験の光の往復時間の差は、

$$\begin{aligned}
 \Delta T - \Delta T' &= \left( \frac{2\ell_1/c}{1-\beta^2} - \frac{2\ell_2/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) - \left( \frac{2\ell_1/c}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{2\ell_2/c}{1-\beta^2} \right) \\
 &= \frac{2\ell_1}{c} \left( \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) + \frac{2\ell_2}{c} \left( \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\
 &= \frac{2(\ell_1 + \ell_2)}{c} \left( \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\
 &= \frac{2(\ell_1 + \ell_2)}{c} \left\{ (1 + \beta^2 + \dots) - \left( 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots \right) \right\} \\
 &\cong \frac{\ell_1 + \ell_2}{c} \beta^2
 \end{aligned}$$

と計算されます。よって、90°の回転により光路差の変化、

$$c(\Delta T - \Delta T') \cong (\ell_1 + \ell_2)\beta^2$$

に相当する干渉縞の移動が起こるはずですが、ここで、太陽の周りの地球の公転速度は、

$$v \cong 3 \times 10^4 [\text{m/s}]$$

であり、光速は、

$$c \cong 3 \times 10^8 [\text{m/s}]$$

なので、

$$\beta = \frac{v}{c} \cong 10^{-4}$$

となります。また、マイケルソン-モーレイの装置では、

$$\ell_1 \cong \ell_2 \cong 11 [\text{m}]$$

であったので、光路差の変化は、

$$(\ell_1 + \ell_2)\beta^2 = (11 + 11) \times (10^{-4})^2 = 22 \times 10^{-8} = 2.2 \times 10^{-7} [\text{m}]$$

となります。しかし、マイケルソンとモーレイの結果は、実験値が上の理論値よりもずっと小さいことを示していました。地球のエーテルに対する運動は検出されなかったのです。一つの可能性としては、地球がエーテルに対して静止していることも考えられますが、太陽の周りを公転していることを考慮すると、そのアイディアは捨てなければなりません。残る選択肢は、絶対空間とそこにあるエーテルの存在を否定するしかありません。

このようにして、基準となる絶対空間が存在せず、全て同等な相対的な空間を考えていく必要が生じました。アインシュタインは空間が相対的であるとしたのに留まらず、時間と空間との関係についても再考しました。次の節から特殊相対性理論の原理について考えていきましょう。



## 1.4 特殊相対性原理と光速不変の原理

1905年、アインシュタインは19世紀までの物理学と決別するべく、特殊相対性理論を発表しました。ニュートン力学とマクスウェル電磁気学の2つの理論を足がかりとして、革命的な理論に創りなおしたのです。その理論の核心となる2つの原理を、以下に見ていきましょう。

特殊相対性理論では、慣性系の場合を考えます。このことは、特殊という言葉を使用する理由になっています。特殊相対性理論では、全ての慣性系は相対的です。つまり、特別な慣性系は存在せず、お互いに等速直線運動をしているあらゆる慣性系は同等になります。さらに、特殊相対性理論ではそれ以上のことを主張します。すなわち、全ての物理法則にとって、あらゆる慣性系は同等であるということです。このことをアインシュタインは原理として採用しました。

**原理 1.1 (特殊相対性原理)** “物理法則は全ての慣性系において、同じ形式で表現されます。”

この原理を特殊相対性原理といいます。ニュートン力学の法則を表す方程式も、電磁気学の法則を表すマクスウェル方程式も、同じ形式で表現されることを要請したのです。(後に、量子力学、場の量子論、弦理論の法則も含むように拡張されました。)具体的に特殊相対性原理を満たす座標変換を考えなくてはなりません。前述したように、ガリレイ変換は、ニュートン力学の運動方程式に対しては相対性原理を満たしますが、マクスウェル方程式の形を変えてしまいますので、要求を満たしていません。新しい座標変換を考えなくてはなりませんが、次のChapterで導入していきます。

特殊相対性理論にはもう1つ原理があります。アインシュタインは10代半ばの頃、次のようなことを考えていたといいます。すなわち、光速で運動している人は鏡で自分の顔を見ることができようか、という疑問です。顔から出た光は、その人が光速で追いかけているので、速さ0になり、鏡では見ることができないのではないのでしょうか？あるいは特別なことが起こるのでしょうか？ここで、この疑問に答えるために、上記の特殊相対性原理を前述のマクスウェル電磁気学について考えてみます。電磁気学の基本法則は4式のマクスウェル方程式ですが、特殊相対性原理より全ての慣性系で同じ形式の方程式になると結論付けられます。よって、マクスウェル方程式から導出される波動方程式も、全ての慣性系で同じ形式の方程式になります。実際に、変換後の慣性系での波動方程式を書き留めておくと、

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}'(t', \vec{x}')}{\partial t'^2} &= \nabla'^2 \vec{E}'(t', \vec{x}') \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}'(t', \vec{x}')}{\partial t'^2} &= \nabla'^2 \vec{B}'(t', \vec{x}')\end{aligned}$$

です。ダッシュが付いているのは、変換後の座標における量であることを示しています。ここで、波動方程式には光速  $c$  が含まれていて、同形の波動方程式から計算されるので、全ての慣性系において光速は同じ値になることが理解されます。この結論は常識とは相容れませんが、アインシュタインは原理として採用しました。(特殊相対性理論の原理は計2つです。)

**原理 1.2 (光速不変の原理)** “光速は全ての慣性系において一定値  $c$  です。”

この原理を光速不変の原理といいます。(この原理によれば、自分の顔は見えることになりますね。)

## 1.5 同時性の問題

### (絶対時間の概念の破棄から相対的な時間へ)

光速不変の原理を認めると、事象が同時に起こるということについて、常識では考えられない結論が得られます。例として、等速直線運動している列車の中央でフラッシュを発した情况进行えます。列車の中にいる観測者にとって、光速は一定値  $c$  です。この観測者にとって、光のパルス波は同時に列車の両端に到着します。(図の“同時性 1”を参照してください。) 一方、光速不変の原理から、地面にいる観測者にとっても光速は一定値  $c$  です。列

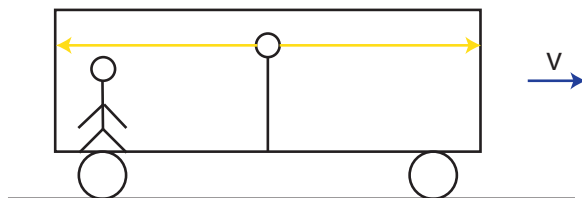


Figure 1.3: 同時性 1

車は前方に運動しているので、光のパルス波は前方の端よりも後方の端に早く到着することになります。(図の“同時性 2”を参考にして下さい。) 列車の中の観測者にとって同時で

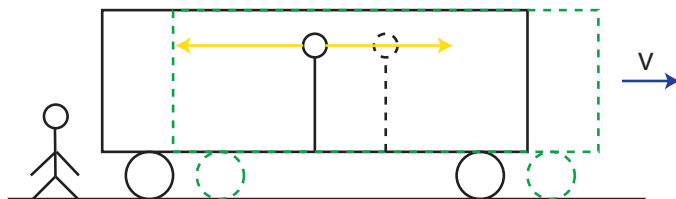


Figure 1.4: 同時性 2

ある出来事が、地面にいる観測者にとっては同時ではなくなります。もちろん、列車の速度は光速に比較して小さいので、この結論はほとんど無視できます。しかしながら、原理的には同時性が破れているのです。

列車の中の観測者にとっての同時ということと、地面にいる観測者にとっての同時ということは違うことが理解できました。言い直すと、列車に固定した座標系と、地面に固定した座標系では同時性が異なるということです。さらに話を進めると、時間というものは観測する座標系によって異なったものである、ということまで考えることができます。全ての座標系で共通の絶対時間という概念は破棄される運命にあるのです。空間とともに、時間も相対的なものであることが理解されます。

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

## Chapter 2

# ローレンツ変換とミンコフスキー 時空

### 2.1 慣性系とローレンツ変換

前 Chapter で、特殊相対性原理と光速不変の原理を導入し、特別な慣性系は存在しないことについて言及しました。ただし、特殊相対性理論では、慣性系に限って、議論を進めていきます。全く一般の座標系の場合は、一般相対性理論の Part で取り扱います。慣性系とは、慣性の法則が成立する座標系であると定義されましたね。重力が働いている座標系や、加速運動をしている座標系は慣性系ではありません。これからの議論は、完全な慣性系があるものとして進めていきます。一旦、慣性系が一つ見つければ、それに対して等速直線運動している無限個の座標系も慣性系になります。そして、全ての慣性系で物理学の法則は、同じ形式で表現されるのでした。特殊相対性理論は慣性系の間関係について取り扱っていく理論です。

ニュートン力学では、慣性系の中の座標変換はガリレイ変換でした。しかし、マクスウェル電磁気学は、ガリレイ変換に対して成立しませんでした。マクスウェル電磁気学でも成立するような、特殊相対性理論で取り扱う、慣性系の中の座標変換をローレンツ変換といいます。ローレンツ変換がどのように表され、導出されるのか、次の Section で見いきましょう。

## 2.2 ローレンツ変換の導出

ローレンツ変換を導出しましょう。ガリレイ変換を導出したときと同じ状況設定をします。つまり、慣性系  $S$  (時間が  $t$ , 空間成分が  $(x, y, z)$  です。) に対して,  $x$  の正の方向に速さ  $v$  で等速直線運動している慣性系  $S'$  (時間が  $t'$ , 空間成分が  $(x', y', z')$  です。) を考えます。ただし, ダッシュの付いていない慣性系とダッシュの付いている慣性系は同等な座標系であり, 基準となる慣性系はありません。2つの慣性系が時刻 0 で原点が一致した瞬間に, 原

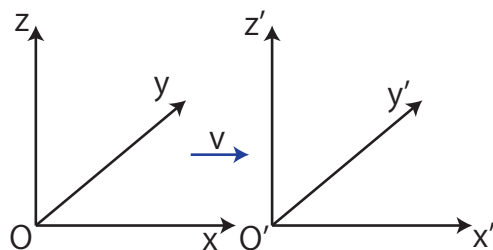


Figure 2.1: ローレンツ変換 1

点から光のパルス波を発射するものとします。光速不変の原理より, その波面は  $S$  に対しても,  $S'$  に対しても, 球面状に外向きに一定の速さ  $c$  で広がっていきます。したがって, それぞれの光の波面は, 球面の方程式である次式を満たします。

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

この2式を次のように書き直しておきます。

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \tag{2.1}$$

$$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \tag{2.2}$$

ここで, 2つの慣性系の間座標変換は線形であると仮定します。

$$t' = At + Bx$$

$$x' = Ct + Dx$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$y$  方向と  $z$  方向は運動していないので,  $y$  成分と  $z$  成分は不変であるとしてきました。また, 時間も変換すると仮定しました。(前の Chapter での同時性の問題の議論を思い出して下さい。絶

対時間の概念は破棄され、時間は観測する座標系によって異なったものでした。)  $A, B, C, D$  は変換の係数です。以下の計算によって決定していきます。

慣性系  $S'$  の原点  $O'$  では、 $x' = 0$  ですが、このとき、 $Ct + Dx = 0$  となり、

$$C = -D \frac{x}{t}$$

となります。この式は  $O'$  の満たす式なので、右辺の  $x/t$  は  $O$  に対する  $O'$  の速さ  $v$  になります。したがって、

$$C = -Dv$$

です。故に、

$$x' = D(-vt + x)$$

となります。

これらの式を光の波面が満たす方程式 (ダッシュのついている (2.2) 式) に代入して計算します。

$$\begin{aligned} c^2(At + Bx)^2 - D^2(-vt + x)^2 - y^2 - z^2 &= 0 \\ \therefore c^2(A^2t^2 + 2ABtx + B^2x^2) - D^2(v^2t^2 - 2vtx + x^2) - y^2 - z^2 &= 0 \\ \therefore (c^2A^2 - v^2D^2)t^2 + 2(c^2AB + vD^2)tx - (c^2B^2 + D^2)x^2 - y^2 - z^2 &= 0 \end{aligned}$$

ここで、最後の式と光の波面を表す方程式 (ダッシュのついていない (2.1) 式) を比較して、次の 3 式を得ます。

$$c^2A^2 - v^2D^2 = c^2 \tag{2.3}$$

$$c^2AB + vD^2 = 0 \tag{2.4}$$

$$-c^2B^2 + D^2 = 1 \tag{2.5}$$

これらの式を  $A, B, D$  について解きます。(2.4) 式より、

$$D^2 = -c^2 \frac{AB}{v} \tag{2.6}$$

が得られます。(2.6) 式を (2.3) 式に代入します。

$$c^2A^2 + c^2vAB = c^2$$

よって、

$$\frac{A}{v} \left( B + \frac{A}{v} \right) = \frac{1}{v^2} \tag{2.7}$$

さらに、(2.6) 式を (2.5) 式に代入して計算します。

$$-c^2B^2 - c^2 \frac{AB}{v} = 1$$

故に,

$$B\left(B + \frac{A}{v}\right) = -\frac{1}{c^2} \quad (2.8)$$

となります. (2.8) 式 ÷ (2.7) 式より,

$$\begin{aligned} \frac{B\left(B + \frac{A}{v}\right)}{\frac{A}{v}\left(B + \frac{A}{v}\right)} &= \frac{-\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{v^2}} \\ \therefore B \frac{v}{A} &= -\frac{v^2}{c^2} \end{aligned}$$

となり, よって,

$$B = -v \frac{A}{c^2} \quad (2.9)$$

が得られます. (2.9) 式を (2.8) 式に代入して,

$$\begin{aligned} -v \frac{A}{c^2} \left(-v \frac{A}{c^2} + \frac{A}{v}\right) &= -\frac{1}{c^2} \\ \therefore \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) A^2 &= 1 \\ \therefore A &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

(ただし,

$$\beta \equiv \frac{v}{c}$$

と, おきました.) ここで,  $v \rightarrow 0$  の極限で  $t' = t$  となるので, 前の符号は正になります.

よって,

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

です. (2.9) 式より,

$$\begin{aligned} B &= -v \frac{1}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

となります. また, (2.6) 式より,

$$\begin{aligned} D^2 &= -c^2 \frac{AB}{v} \\ &= -\frac{c^2}{v} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2} \end{aligned}$$

となり，故に，

$$D = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

です．ここで， $v \rightarrow 0$  の極限で  $x' = x$  となるので，前の符号は正になります．よって，

$$D = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

です．以上で， $A, B, D$  が出揃いました．よって，時間成分の変換は次のようになります．

$$\begin{aligned} t' &= At + Bx \\ &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \therefore ct' &= \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

この時間成分を  $ct$  という量を使って表しています．これは，時間  $t$  に光速  $c$  をかけると式が見やすくなるということと，時間成分も空間成分に合わせて長さの次元にできるという利点があります．また，

$$\begin{aligned} x' &= D(-vt + x) \\ &= \frac{-vt + x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

となります．ここで，ローレンツ変換の式をまとめて書いておきます．時間成分は，

$$\boxed{ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}} \quad (2.10)$$

と変換されます． $x$  成分は，

$$\boxed{x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1-\beta^2}}} \quad (2.11)$$

と変換されます． $y$  成分は，

$$\boxed{y' = y} \quad (2.12)$$

です． $z$  成分は，

$$\boxed{z' = z} \quad (2.13)$$

です．時間成分も空間成分と同様に変換されていることに注意して下さい．繰り返しますが，相対性理論では絶対時間は否定されます．(ニュートン力学の変換であるガリレイ変換で， $t' = t$  となっていたのとは，全く違いますね.)



次に、ローレンツ逆変換、すなわちダッシュの付かない成分をダッシュの付いた成分で表す式を導いておきましょう。(2.10)式より、

$$ct - \beta x = \sqrt{1 - \beta^2} ct' \quad (2.14)$$

です。故に、

$$\beta ct - \beta^2 x = \sqrt{1 - \beta^2} \beta ct'$$

となります。また、(2.11)式より、

$$-\beta ct + x = \sqrt{1 - \beta^2} x'$$

です。これらの式の両辺をそれぞれ加え計算します。

$$\begin{aligned} -\beta^2 x + x &= \sqrt{1 - \beta^2} \beta ct' + \sqrt{1 - \beta^2} x' \\ \therefore (1 - \beta^2)x &= \sqrt{1 - \beta^2} (\beta ct' + x') \\ \therefore x &= \frac{\beta ct' + x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

また、(2.14)式より、

$$\begin{aligned} ct &= \beta x + \sqrt{1 - \beta^2} ct' \\ &= \frac{\beta^2 ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{(1 - \beta^2) ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

となります。ローレンツ逆変換をまとめて書くと、

$$ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.15)$$

$$x = \frac{\beta ct' + x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.16)$$

$$y = y' \quad (2.17)$$

$$z = z' \quad (2.18)$$

となります。これらは、ローレンツ変換(2.10)式～(2.13)式で、ダッシュを付け替え、 $v$ を $-v$ に置き換えたものになっています。このことから、2つの慣性系が全く同等であることが理解されますね。

## 2.3 ローレンツ変換とガリレイ変換の関係

特殊相対性理論の座標変換は、ローレンツ変換であることがわかりました。ガリレイ変換はニュートン力学の変換であり、破棄されるべきものです。しかし、慣性系間の速度  $v$  が、

光速  $c$  に比べて小さいときは、ローレンツ変換は近似的にガリレイ変換になります。つまり、日常生活の上では、ガリレイ変換も近似的に成立するのです。計算によってこのことを示しておきましょう。ローレンツ変換の時間成分は、

$$ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

でした。ここで、

$$f(\beta) = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

とおき、 $\beta$  についてマクローリン展開します。

$$f'(\beta) = \frac{-x\sqrt{1 - \beta^2} - (ct - \beta x)\frac{1}{2}(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}(-2\beta)}{1 - \beta^2}$$

なので、

$$\begin{aligned} f(\beta) &= f(0) + f'(0) \cdot \beta + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot \beta^2 + \dots \\ &\cong ct + (-x)\beta \end{aligned}$$

となります。ただし、 $\beta$  の 2 次以上の項は小さいとして無視しました。このとき、

$$\begin{aligned} ct' &= ct - \beta x \\ \therefore t' &= t - \frac{v}{c^2} x \\ &\cong t \end{aligned}$$

となります。確かに、時間成分は近似的にガリレイ変換になりました。同様に、 $x$  成分も見ておきます。ローレンツ変換は、

$$x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

でした。ここで、

$$g(\beta) = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

とおき、 $\beta$  についてマクローリン展開します。

$$g'(\beta) = \frac{-ct\sqrt{1 - \beta^2} - (-\beta ct + x)\frac{1}{2}(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}(-2\beta)}{1 - \beta^2}$$

なので、

$$\begin{aligned} g(\beta) &= g(0) + g'(0) \cdot \beta + \frac{1}{2!} g''(0) \cdot \beta^2 + \dots \\ &\cong x + (-ct)\beta \end{aligned}$$

となります。ただし、 $\beta$  の 2 次以上の項は小さいとして無視しました。このとき、

$$\begin{aligned}x' &= x - \beta ct \\ &= x - vt\end{aligned}$$

となります。確かに、 $x$  成分は近似的にガリレイ変換になりました。

一般に、慣性系間の速度  $v$  が光速  $c$  に比べて小さい場合、特殊相対性理論の結論はニュートン力学に近似されます。特殊相対性理論はニュートン力学を含んでいると言ってもよいでしょう。

## 2.4 4次元時空と世界点・世界線

ローレンツ変換 (2.10) 式～(2.13) 式は時間と空間の成分が混ざった変換式になっています。時間と空間は密接に関係し、切り離して考えることは、もはや不可能です。そこで、これからは時間 1 次元と空間 3 次元からなる 4 次元時空という概念を導入します。慣性系はニュートン力学では空間的な概念でしたが、特殊相対性理論では 4 次元時空の慣性系に進化します。特殊相対性理論における 4 次元時空の慣性系を、次のように表記します。

$$M(ct, x, y, z)$$

(慣性系を表していた  $S$  という文字を、 $M$  に替えました。これは後の Section で導入する Minkowski 時空の頭文字から採りました。) 括弧の中の最初の成分は時間についてのもですが、前にも触れたように光速  $c$  が掛かっています。この成分を第 0 成分とします。また、 $x, y, z$  は空間成分ですが、第 1, 第 2, 第 3 成分とします。(空間成分を第 1, 第 2, 第 3 成分とし、時間成分を第 4 成分とする表記方法もありますが、ここでは第 0, 第 1, 第 2, 第 3 成分とする方法を採用します。時間成分は第 4 成分とするよりも、第 0 成分とした方が、空間成分と見分けることができ考えやすいと思います。)

フラッシュが光ったとか、物体が速度を変えたとか、2 つの物体が衝突した等の物理的な出来事を事象といいます。事象を記述するには、その起こった時間と空間を示さなければなりません。そのために、4 次元時空の 1 点  $(ct, x, y, z)$  である世界点というものを導入します。1 つの粒子の 4 次元時空上での世界点の軌跡を世界線と言います。4 次元時空のグラフを図示することは不可能なので、縦軸に時間成分  $ct$  軸をとり、横軸に空間 1 成分 ( $x$  成分) をとった、2 次元時空図を描いてみます。ここで、 $A$  と  $B$  は世界点を示します。世界線  $C$  は静止している粒子を表しています。 $x$  成分が変化せず、時間成分  $ct$  だけが増加していますね。世界線  $D$  は等速直線運動している粒子を表しています。傾きが一定になってい

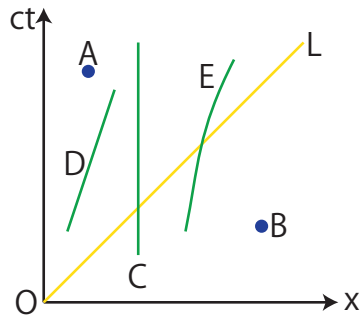


Figure 2.2: 世界点と世界線

て等速であることがわかります。  $L$  は光の世界線です。 速さが  $c$  ですから、傾きは 1 になります。(縦軸が  $ct$  であることに注意して下さい。) 世界線  $E$  は任意の運動をしている粒子を表しています。

## 2.5 ローレンツ変換の 2 次元時空図

2 次元時空図においてローレンツ変換はどのように図示されるでしょうか?  $M(ct, x)$  から  $M'(ct', x')$  へのローレンツ変換の式は,

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x' &= \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

と表されます。 変換された  $ct'$  軸は、 $x' = 0$  とおいて、

$$\begin{aligned} 0 &= -\beta ct + x \\ \therefore ct &= \frac{1}{\beta} x \end{aligned}$$

となります。 また、変換された  $x'$  軸は、 $ct' = 0$  とおいて、

$$\begin{aligned} 0 &= ct - \beta x \\ \therefore ct &= \beta x \end{aligned}$$

となります。 したがって、2 次元時空図は図のようになります。 世界点  $A$  は  $M$  に対しては  $(ct_1, x_1)$  ですが、 $M'$  に対しては  $(ct'_1, x'_1)$  となります。 また、図の角  $\theta$  は、

$$\tan \theta = \beta$$

の関係があります。  $L$  は光の世界線です。

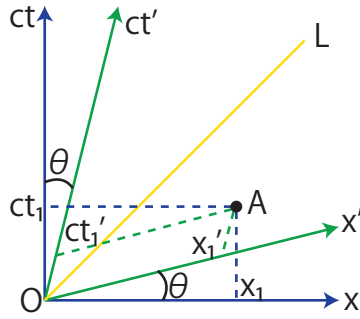


Figure 2.3: ローレンツ変換 2

ローレンツ逆変換も 2次元時空図で表しておきましょう。変換の式は、

$$ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x = \frac{\beta ct' + x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

でした。変換された  $ct$  軸は、 $x = 0$  とおいて、

$$0 = \beta ct' + x'$$

$$\therefore ct' = -\frac{1}{\beta} x'$$

となります。また、変換された  $x$  軸は、 $ct = 0$  とおいて、

$$0 = ct' + \beta x'$$

$$\therefore ct' = -\beta x'$$

となります。したがって、2次元時空図は図のようになります。世界点  $A$  は  $M'$  に対して

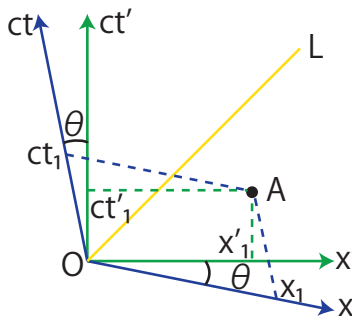


Figure 2.4: ローレンツ逆変換

は、 $(ct'_1, x'_1)$  ですが、 $M$  に対しては  $(ct_1, x_1)$  となります。やはり、図の角  $\theta$  は、

$$\tan \theta = \beta$$

の関係があります。  $L$  は光の世界線です。

## 2.6 インターバルとミンコフスキー時空

3次元空間の原点  $O(0,0,0)$  と任意の座標  $(x,y,z)$  の間の距離  $r$  の2乗は三平方の定理より、

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

で表されました。そして、この距離  $r$  の2乗は原点の回りの座標軸の回転に対して値を変えませんでした。(変換の前後で変わらない量を不変量といい、その性質を不変性と言います。) このことは直観的に明らかですが、直接計算によって次のように示すことができます。簡単のため、 $z$ 軸を軸として、 $xy$ 平面を  $\theta$  だけ反時計回りに回転させます。回転後の座標  $(x',y',z')$  は回転前の座標  $(x,y,z)$  によって、

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

と表されます。したがって、

$$\begin{aligned} r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ &= (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 + (-x \sin \theta + y \cos \theta)^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

(証明終。)

4次元時空に対して、この3次元空間の距離  $r$  に相当する量を考えましょう。時間  $t = 0$  で空間座標の原点  $x = y = z = 0$  を出発した光の先端が  $t$  秒後に到達する点の座標の方程式、つまり、光の球面波の式は、

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

で与えられました。光速不変の原理より、この式が任意の慣性系において成立することから、ローレンツ変換は導出されました。この式の左辺の量は、光に対しては常に0になりますが、原点  $O(0,0,0,0)$  と任意の世界点  $A(ct, x, y, z)$  に対してはある有限の値をとります。そこで、この量を4次元時空における距離の2乗として定義し、その性質を調べることにします。

$$\boxed{s^2 \equiv (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2} \quad (2.19)$$

ここで、 $s$  をインターバルと名付けることにします。(世界距離または不変距離とも言います。) インターバルの 2 乗の式の中には、空間成分の 2 乗の和に加えて、時間成分の 2 乗が入ってきています。そして、時間成分の 2 乗の符号と空間成分の 2 乗の和の符号は反対になっています。ここでは、時間成分の 2 乗の符号を正、空間成分の 2 乗の和の符号を負と定義しました。この定義は逆にしても構いません。要は、インターバルはローレンツ変換に対して不変であるという大切な性質をもっていけばよいのです。これはもともとインターバルが不変になるようにローレンツ変換を導出したのですから、当然の結論なのですが、次のように直接計算して示すことができます。

$$\begin{aligned}
 s'^2 &= (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \\
 &= \left(\frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)^2 - \left(\frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)^2 - y^2 - z^2 \\
 &= \frac{c^2 t^2 - 2\beta ct x + \beta^2 x^2}{1 - \beta^2} - \frac{\beta^2 c^2 t^2 - 2\beta ct x + x^2}{1 - \beta^2} - y^2 - z^2 \\
 &= \frac{(1 - \beta^2)c^2 t^2 - (1 - \beta^2)x^2}{1 - \beta^2} - y^2 - z^2 \\
 &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\
 &= s^2
 \end{aligned}$$

(証明終.) お互いに等速直線運動する 2 つの慣性系はローレンツ変換で結ばれ、その際インターバルは不変です。(これをインターバルのローレンツ不変性といいます。) インターバルがローレンツ不変性をもつ慣性系のことをミンコフスキー時空と言います。特殊相対性理論における 4 次元時空はミンコフスキー時空です。なお、2 つの世界点の間を無限小にとって、

$$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

で定義された量  $ds$  を無限小インターバルと名付けます。無限小インターバルもローレンツ不変量です。

## 2.7 ミンコフスキー時空の分類

特殊相対性理論の時空であるミンコフスキー時空は、インターバルの 2 乗の符号により分類することができます。簡単のため、2 次元時空を考えましょう。原点  $O(0, 0)$  と世界点  $A(ct, x)$  の間のインターバルの 2 乗は、

$$s^2 = (ct)^2 - x^2$$

となります。インターバルの2乗が正の値をとるとき、時空は時間的 (Time-like) であると言います。このとき、

$$\begin{aligned}(ct)^2 - x^2 &> 0 \\ \therefore (ct+x)(ct-x) &> 0 \\ \therefore (ct+x > 0 \text{ and } ct-x > 0) \text{ or } (ct+x < 0 \text{ and } ct-x < 0) \\ \therefore (ct > -x \text{ and } ct > x) \text{ or } (ct < -x \text{ and } ct < x)\end{aligned}$$

の関係があります。(2次元時空図での領域は、“ミンコフスキー時空”の図を見て下さい。) 時間的な時空において、原点  $O(0,0)$  と世界点  $A(ct,x)$  は因果関係をもつことができます。つまり、影響を及ぼすことのできる関係にあります。次に、インターバルの2乗が負の値をとるとき、時空は空間的 (Space-like) であると言います。このとき、

$$\begin{aligned}(ct)^2 - x^2 &< 0 \\ \therefore (ct+x)(ct-x) &< 0 \\ \therefore (ct+x > 0 \text{ and } ct-x < 0) \text{ or } (ct+x < 0 \text{ and } ct-x > 0) \\ \therefore (ct > -x \text{ and } ct < x) \text{ or } (ct < -x \text{ and } ct > x)\end{aligned}$$

の関係があります。(2次元時空図での領域は、“ミンコフスキー時空”の図を見て下さい。) 空間的な時空では、原点  $O(0,0)$  と世界点  $A(ct,x)$  は因果関係をもつことができません。(信号は光速を超えることはできません。) 最後にインターバルの2乗が0のとき、時空は光的 (Light-like) であると言います。このとき、

$$\begin{aligned}(ct)^2 - x^2 &= 0 \\ \therefore (ct+x)(ct-x) &= 0 \\ \therefore ct &= -x \text{ or } ct = x\end{aligned}$$

の関係があります。(2次元時空図では2本の黄色の直線になります。) 光のインターバルの2乗は0になります。まとめると次のようになります。

1. Time-like( $s^2 > 0$ )
2. Space-like( $s^2 < 0$ )
3. Light-like( $s^2 = 0$ )

次の Chapter では、特殊相対性理論に従うと、どのような世界になるのか、その非日常的な現象を見ていくことにしましょう。



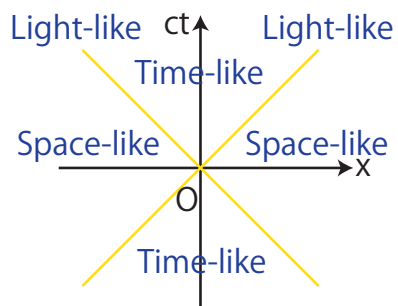


Figure 2.5: ミンコフスキー時空

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

# Chapter 3

## 特殊相対性理論の世界

### 3.1 同時性の問題

特殊相対性理論を認めると、常識では考えられないような結論が幾つか導かれます。初等的な取扱い、そしてローレンツ変換、ローレンツ逆変換とミンコフスキー時空図を用いて、以下議論していきましょう。

最初に、同時性の問題を見ておきます。この問題は、“特殊相対性原理と光速不変の原理”の Chapter の最後に、光速不変の原理を用いて取り扱いました。そのときの状況を表す 2 つの図を再掲しておきます。等速直線運動している列車の中央から光のフラッシュを放った場合、列車に乗り込んだ観測者（慣性系  $M'$ ）には、列車の両端に同時に光が到着するのに対して、地面から見てる観測者（慣性系  $M$ ）に対しては同時ではありません。光速不変の原理より、列車に対しても、地面に対しても、光の速さが同じ  $c$  になることが話の肝心の点でした。この同時性の問題を、ローレンツ逆変換を用いて取り扱っておきます。時間 1 次元と空間 1 次元 ( $x$  成分) からなる 2 次元時空を考えます。(この Chapter では、以下、主に 2 次元時空を考えます。) 慣性系  $M(ct, x)$  に対して、 $x$  方向に速さ  $v$  で等速直線運動している慣性系  $M'(ct', x')$  という状況です。慣性系  $M'(ct', x')$  において同時に起こった 2 つの事象  $A'(ct', x'_1)$  と  $B'(ct', x'_2)$  は、 $M$  においてはそれぞれ  $A(ct_1, x_1)$  と  $B(ct_2, x_2)$  とおくことができます。 $M$  における時間の成分を同じ文字で表さなかったのは、事象が同時に起こったか否か、保証されていないためです。ローレンツ逆変換の時間成分の式、

$$ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

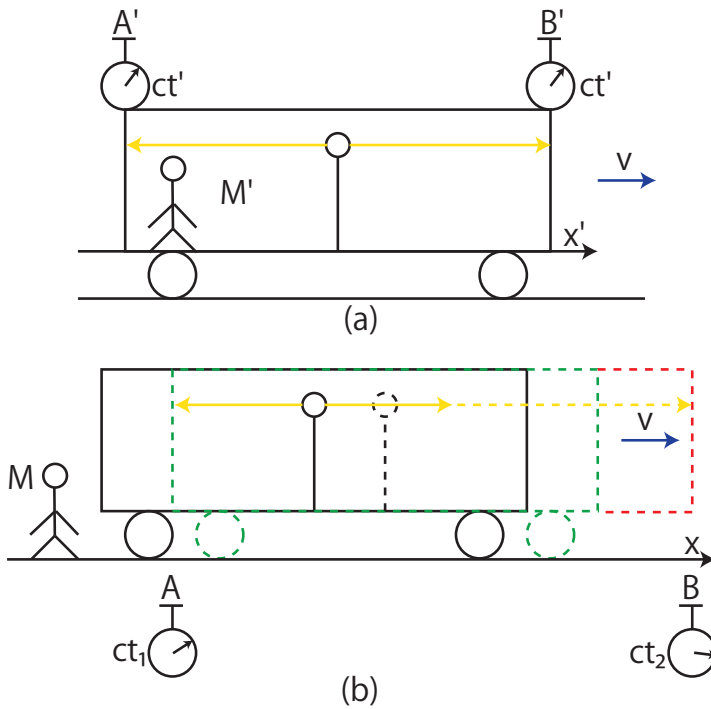


Figure 3.1: 同時性 3

より、次の量を計算します。

$$\begin{aligned}
 ct_2 - ct_1 &= \frac{ct' + \beta x'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{ct' + \beta x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\
 &= \frac{\beta(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}
 \end{aligned}$$

ここで、 $x'_1 \neq x'_2$  なので、 $t_1 \neq t_2$  となり、やはり、 $M$  において同時性が破れていることが確認されます。2次元時空図も見ておきましょう。世界点  $A'$  と世界点  $B'$  は、慣性系  $M'$  に対

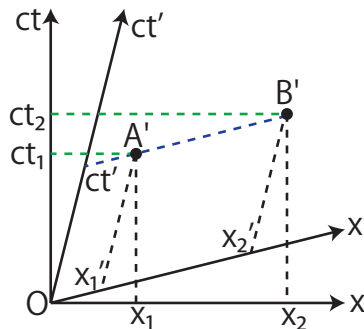


Figure 3.2: 同時性 4

しては、同時刻  $t'$  です。(青色の破線を見て下さい。) 一方、慣性系  $M$  に対しては、 $A$  の時刻が  $t_1$  で、 $B$  の時刻が  $t_2$  となり、同時ではありません。(2本の緑色の破線を見て下さい。  $ct_1 < ct_2$  で、 $A$  の方が先に起こります。)

議論のついでに、慣性系  $M(ct, x)$  において、同時に起こった2つの事象  $C(ct, x_3)$  と  $D(ct, x_4)$  に対して、慣性系  $M'(ct', x')$  では同時性が破れていることも確認しておきましょう。この場合、慣性系  $M'(ct', x')$  に対して、 $x$  の負の方向に速さ  $v$  で等速直線運動している慣性系  $M(ct, x)$  という状況を設定しておきます。2つの事象は  $M'$  においては、それぞれ

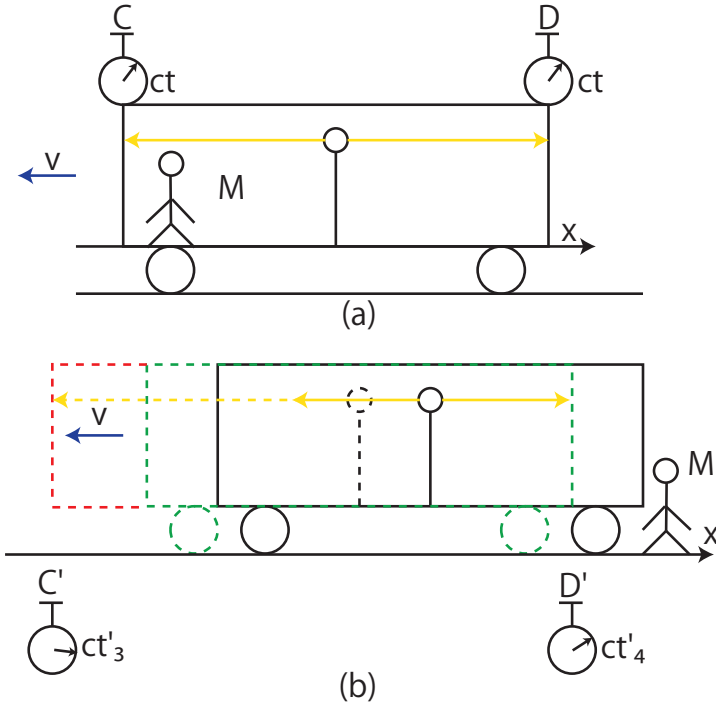


Figure 3.3: 同時性 5

$C'(ct'_3, x'_3)$  と  $D'(ct'_4, x'_4)$  とおくことができます。  $M'$  における時間の成分を同じ文字で表さなかったのは、事象が同時に起こったか否か、保証されていないためです。ローレンツ変換の時間成分の式、

$$ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

により、次の量を計算します。

$$\begin{aligned} ct'_3 - ct'_4 &= \frac{ct - \beta x_3}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{ct - \beta x_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{\beta(x_4 - x_3)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

このとき、 $x_3 \neq x_4$  なので、 $t'_3 \neq t'_4$  となります。同時性が破れていることが確認できました。2次元時空図でも同時性が破れていることが確かめられます。（“同時性 6”の図を見て下さい。）世界点  $C$  と世界点  $D$  は、慣性系  $M$  に対しては、同時刻  $t$  です。（青色の破線を見て下

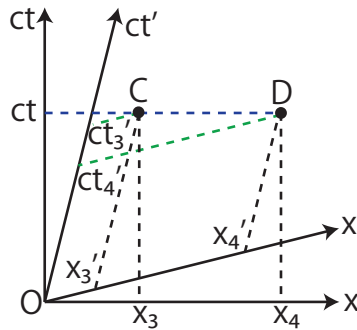


Figure 3.4: 同時性 6

さい。）一方、慣性系  $M'$  に対しては、 $C'$  の時刻が  $t'_3$  で、 $D'$  の時刻が  $t'_4$  となり、同時ではありません。（2本の緑色の破線を見て下さい。 $ct'_3 > ct'_4$  で、 $D'$  の方が先に起こります。）

## 3.2 時間の遅れ

引き続き時間についてですが、ニュートン力学の世界とは全く違う特殊相対論的な現象として、

- “動いている慣性系の時間は遅れます。”

ということについて考えましょう。まず、直観的に理解しやすい例として、光時計と呼ばれるものを取り扱います。これは光の進んだ距離によって時間を計る装置です。“時間の遅れ 1”の図を見て下さい。地球の大きさよりも巨大で、光速の 80 パーセントの速さで等速直線運動している乗り物を考えます。（思考実験ですから設定可能です。）乗り物に乗り込んだ観測者（慣性系  $M'$ ）から見て、進行方向と垂直に光が往復しています。（図の緑色の線は鏡です。）慣性系  $M'$  に対して、光速は  $c$  です。時間が、片道  $3[s]$ 、往復  $6[s]$  経過したとします。（図の (a) を見て下さい。）このとき、乗り物の外から見た観測者（慣性系  $M$ ）に対しては、光が一往復するのに何秒かかるのでしょうか？  $M$  に対する光速は、光速不変の原理より、やはり  $c$  です。しかし、乗り物が運動していますので、図の (b) のように、光は進行方向に対して斜めに進みます。そして、図の直角三角形は三平方の定理より、 $3c : 4c : 5c$  の辺の比を持ちます。これから、 $M$  においては、光が一往復するのに  $10[s]$  かかることがわかります。動いている慣性系  $M'$  においては、時間がゆっくりと進み、遅れることが理解されますね。議論を一般化して、乗り物の速さを  $v$ 、 $M'$  において光が一往復するのに要

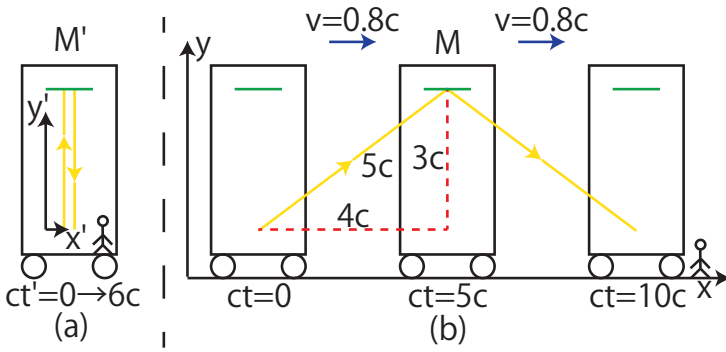


Figure 3.5: 時間の遅れ 1

する時間を  $T'$ ,  $M$  において光が一往復するのに要する時間を  $T$  とします。(“時間の遅れ 2”の図を見て下さい。) ここで、直角三角形に対して、三平方の定理を使い計算します。

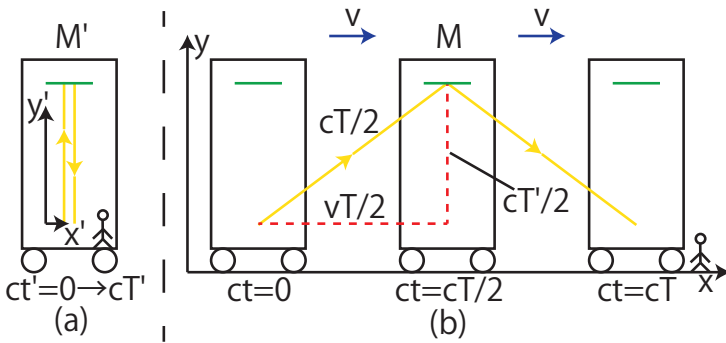


Figure 3.6: 時間の遅れ 2

$$\begin{aligned} \left(c\frac{T}{2}\right)^2 &= \left(v\frac{T}{2}\right)^2 + \left(c\frac{T'}{2}\right)^2 \\ \therefore c^2T^2 &= v^2T^2 + c^2T'^2 \\ \therefore c^2T'^2 &= (c^2 - v^2)T^2 \\ \therefore T'^2 &= T^2(1 - \beta^2) \\ \therefore T' &= T\sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned}$$

やはり、動いている慣性系  $M'$  における光一往復の時間  $T'$  の方が、慣性系  $M$  における光一往復の時間  $T$  よりも小さく、遅れることがわかります。もっとも、慣性系間の速さ  $v$  が光速  $c$  に比べて小さく、 $\beta \equiv \frac{v}{c}$  が無視できる場合は、時間の遅れは微々たるものです。

時間の遅れをローレンツ逆変換を用いて取り扱しましょう。ここでも、慣性系  $M(ct, x)$  に対して、慣性系  $M'(ct', x')$  が速さ  $v$  で等速直線運動している場合を考えます。 $M$  の位置

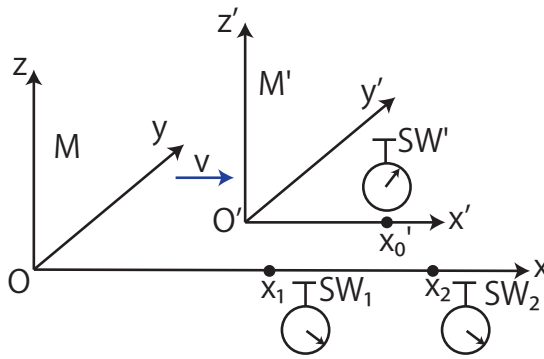


Figure 3.7: 時間の遅れ 3

$x = x_1$  にストップウォッチ  $SW_1$  があり、 $x = x_2$  の位置に  $SW_2$  があり、それぞれ  $M$  に対して固定されています。 $(SW_1$  と  $SW_2$  は、 $M$  において同時刻を示すように設定されているものとします。その方法は、 $x = x_1$  と  $x = x_2$  の中点  $x = (x_1 + x_2)/2$  から光のフラッシュを放ち、到着する時刻を同時刻とすればよいです。) また、 $M'$  の  $x' = x'_0$  の位置にストップウォッチ  $SW'$  が置かれています。 $SW_1$  が時刻  $t_1$  を示したとき、 $SW'$  が  $x = x_1$  の位置を通過したとします。このとき、 $x' = x'_0$  の座標は  $M'$  から見て、 $A'(ct'_1, x'_0)$  です。この事象を  $M$  から見ると、 $A(ct_1, x_1)$  となります。その後、 $SW_2$  が時刻  $t_2$  を示したとき、 $SW'$  が  $x = x_2$  の位置を通過したとします。このとき、 $x' = x'_0$  の座標は  $M'$  から見て、 $B'(ct'_2, x'_0)$  です。この事象を  $M$  から見ると、 $B(ct_2, x_2)$  となります。ここで、ローレンツ逆変換の時間成分の式、

$$ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

より、

$$\begin{aligned} ct_2 - ct_1 &= \frac{ct'_2 + \beta x'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{ct'_1 + \beta x'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{c(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

$$\therefore c(t'_2 - t'_1) = c(t_2 - t_1) \sqrt{1 - \beta^2} < c(t_2 - t_1)$$

となります。ここで、

$$\Delta t \equiv t_2 - t_1$$

$$\Delta t' \equiv t'_2 - t'_1$$

とおくと、

$$\begin{aligned} c\Delta t' &= c\Delta t \sqrt{1 - \beta^2} < c\Delta t \\ \therefore \Delta t' &= \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} < \Delta t \end{aligned}$$

です。つまり、 $M$ において、時間  $\Delta t$  経過したとき、動いている  $M'$  では時間  $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2}$  しか経過していません。これが、運動している時計は遅れるという現象です。例えば、 $v = 0.8c$  のときは、

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - 0.8^2} = \sqrt{0.36} = 0.6$$

となりますから、 $\Delta t' = 0.6\Delta t$  となります。  $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c \cong 0.87c$  のときは、

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5$$

となりますから、 $\Delta t' = 0.5\Delta t$  となります。 もっとも  $\sqrt{1 - \beta^2}$  は、運動の速さ  $v$  が光速に比べて小さいときは、およそ 1 になって、ほとんど影響を及ぼしません。(光速で運動する物体では、 $\sqrt{1 - \beta^2} = 0$  となって、 $\Delta t' = 0$  となります。光速で運動する物体では時間が経過しないという結果になります。) 自分が静止している座標系で測定する時間を、その物体の固有時間といいます。ここでは、 $\Delta t'$  が固有時間になります。固有時間であることを強調するときは、 $\Delta t'$  を  $\Delta \tau$  と表すこともあります。2次元時空図で状況を表すと、“時間の遅れ 4” の図のようになります。  $M$  での経過時間  $c\Delta t = ct_2 - ct_1$  は緑色の線の長さで、動い

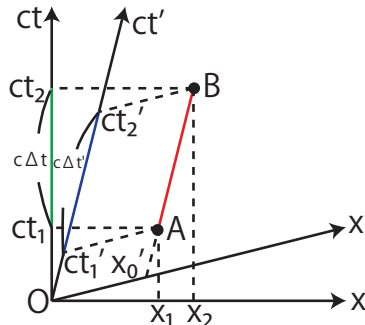


Figure 3.8: 時間の遅れ 4

ている  $M'$  での経過時間  $c\Delta t' = ct'_2 - ct'_1$  は青色の線の長さです。図の上では青色の線が緑色の線よりも長くなっていますが、その値の大小関係は計算で示したように逆になります。(  $c\Delta t' < c\Delta t$  でしたね。)

特殊相対性原理より、 $M$  と  $M'$  は完全に同等のはずです。  $M$  に対して、  $M'$  が等速直線運動しているということは、  $M'$  を基準にして、  $M$  が逆方向に等速直線運動していると考えられることもできますね。この場合、時間が遅れるのは  $M$  の方になってしまいます。これは明らかに上記の時間が遅れるのは  $M'$  の方であるという主張と矛盾しているように思えます。この矛盾を時間のパラドックスといいます。しかし、両方とも正しいのです。立場によって、主張は異なるのは、慣性系が完全に同等であることを意味します。  $M$  に対して  $M'$



が等速直線運動していると考えるときは、遅れる時計  $SW'$  は、 $M'$  に対して静止していて、 $M$  に対しては運動しています。逆に、 $M'$  に対して  $M$  が等速直線運動していると考えるときは、遅れる時計  $SW$  は、 $M$  に対して静止していて、 $M'$  に対しては運動しています。つまり、2つの立場での事象は異なっているのです。このことに注意しながら、ローレンツ変換による計算とミンコフスキー時空図を確認しましょう。 $M'$  の位置  $x' = x'_3$  にストップ

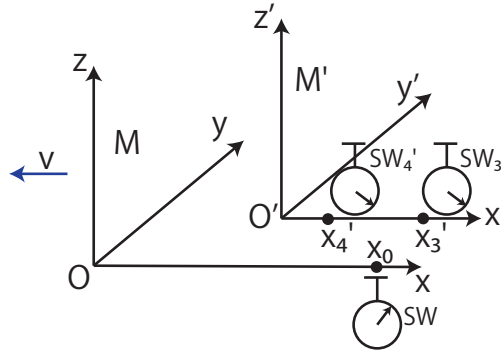


Figure 3.9: 時間の遅れ 5

ウォッチ  $SW'_3$  があり、 $x' = x'_4$  の位置に  $SW'_4$  があり、それぞれ  $M'$  に対して固定されています。(  $SW'_3$  と  $SW'_4$  は、 $M'$  において同時刻を示すように設定されているものとします。前述のフラッシュを使う方法を  $M'$  において行います。) また、 $x = x_0$  の位置にストップウォッチ  $SW$  が  $M$  に対して固定されています。  $SW'_3$  が時刻  $t'_3$  を示したとき、  $SW$  が  $x' = x'_3$  の位置を通過したとします。このとき、  $x = x_0$  の座標は  $M$  からみて、  $C(ct_3, x_0)$  です。この事象を  $M'$  から見ると、  $C'(ct'_3, x'_3)$  となります。その後、  $SW'_4$  が時刻  $t'_4$  を示したとき、  $SW$  が  $x' = x'_4$  の位置を通過したとします。このとき、  $x = x_0$  の座標は  $M$  から見て、  $D(ct_4, x_0)$  です。この事象を  $M'$  から見ると、  $D'(ct'_4, x'_4)$  となります。ここで、ローレンツ変換の時間

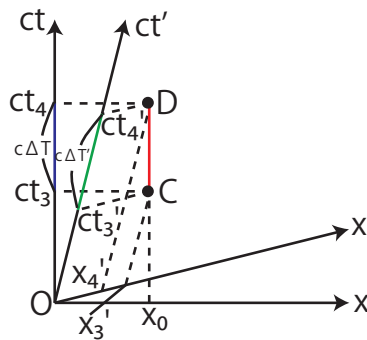


Figure 3.10: 時間の遅れ 6

成分の式,

$$ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

より,

$$\begin{aligned} ct'_4 - ct'_3 &= \frac{ct_4 - \beta x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{ct_3 - \beta x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{c(t_4 - t_3)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \therefore c(t_4 - t_3) &= c(t'_4 - t'_3) \sqrt{1 - \beta^2} < c(t'_4 - t'_3) \end{aligned}$$

となります。ここで,

$$\Delta T \equiv t_4 - t_3$$

$$\Delta T' \equiv t'_4 - t'_3$$

とおくと,

$$\begin{aligned} c\Delta T &= c\Delta T' \sqrt{1 - \beta^2} < c\Delta T' \\ \therefore \Delta T &= \Delta T' \sqrt{1 - \beta^2} < \Delta T' \end{aligned}$$

です。(この場合、慣性系  $M$  に固定された時計の時間を問題としていますので、固有時間は  $\Delta T$  になります。) 事象  $A, B$  と  $C, D$  は違いますので、主張の相違があっても問題はありません。Section 前半の議論で出てきた不等式と比較するため、 $\Delta T' = \Delta t'$  としてみましよう。このとき、

$$\Delta T < \Delta T' = \Delta t' < \Delta t$$

が成立し、矛盾していません。

### 3.3 双子のパラドックス

時間のパラドックスは解消できましたが、時間について、さらに次のようなパラドックスを考えることができます。これは、2つの時計を直接比較できる例です。双子の  $A$  と  $B$  という兄弟が地球にいるとします。  $B$  は宇宙旅行に出かけ、  $A$  は地球に留まるとしましょう。  $B$  は地球から等速直線運動した後、ある時刻で瞬時に反転し、行きと同じ速さで等速直線運動して地球に帰ってきました。(議論を簡単にするため、反転は瞬時に行われるとしました。このためには無限大の力が必要ですが、思考実験においては可能です。) 2次元で考えましよう。地球に固定した座標系を  $M(ct, x)$ 、  $B$  の行きのロケットに固定した座標系を  $M'(ct', x')$ 、  $B$  の帰りのロケットに固定した座標系を  $M''(ct'', x'')$  とします。  $M, M', M''$  は全て慣性系で

あり、 $B$  が帰還したとき、 $A$  の立場から考えると、運動しているのは  $B$  で、 $B$  は自分より若くなっていると主張し、 $B$  の立場から考えると、運動しているのは  $A$  で、 $A$  は自分より若くなっていると主張するでしょう。この矛盾を双子のパラドックスといいます。結論から言うと、正しいのは地球に留まった  $A$  の主張、つまり、 $B$  の方が若いという主張です。

パラドックスを解くためには、この状況の2次元時空図を描くと理解できます。青線  $OPQ$

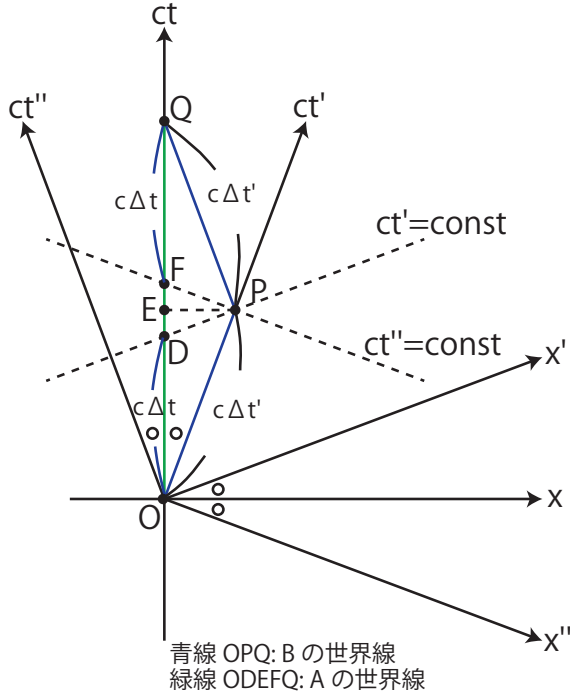


Figure 3.11: 双子のパラドックス

が  $B$  の世界線、緑線  $ODEFQ$  が  $A$  の世界線です。前 Section の結論より、 $B$  の世界線  $OP$  (経過時間  $\Delta t'$ ) に対して、 $A$  の世界線  $OD$  (経過時間  $\Delta t$ ) においては、 $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} < \Delta t$  が成立し、 $B$  の方がゆっくりと時間が経過します。 $B$  の世界線  $PQ$  (経過時間  $\Delta t'$ ) に対して、 $A$  の世界線  $FQ$  (経過時間  $\Delta t$ ) においても、 $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} < \Delta t$  が成立し、 $B$  の方がゆっくりと時間が経過します。さらに、 $B$  が、世界点  $P$  において、一瞬で反転する際、 $A$  の方は世界線  $DEF$  の分だけ時間が経過しています。以上のことから、 $B$  の方が、 $A$  よりも時間が遅れ、年を取らないという結論になり、パラドックスは解消します。

### 3.4 空間の収縮（ローレンツ収縮）

特殊相対性理論では、空間についての現象でもニュートン力学と相いれない結論が導かれます。それは、

- “動いている慣性系の空間は収縮します。”

という現象です。ここでも、慣性系  $M(ct, x)$  に対して、慣性系  $M'(ct', x')$  が  $x$  方向に速さ  $v$  で等速直線運動をしている状況を考えます。  $M'$  の  $x'$  軸に沿って置かれている長さ  $\ell_0$  の棒を、  $M$  において同時刻に観測する場合を考察します。（同時刻の設定方法は、前述のフラッシュを使う方法です。）  $M'$  における棒の両端の  $x'$  座標を  $x'_1, x'_2$  ( $x'_2 > x'_1$ ) とし、棒の両端の  $x$  座標を、  $M$  における同時刻  $t$  のとき、  $x_1, x_2$  ( $x_2 > x_1$ ) とします。  $M$  における、この2つの事象を  $A(ct, x_1), B(ct, x_2)$  とします。これらを  $M'$  から見ると、  $A'(ct'_1, x'_1), B'(ct'_2, x'_2)$  となります。ローレンツ変換により議論を進めましょう。ここで、ローレンツ変換の  $x'$  成分の式、

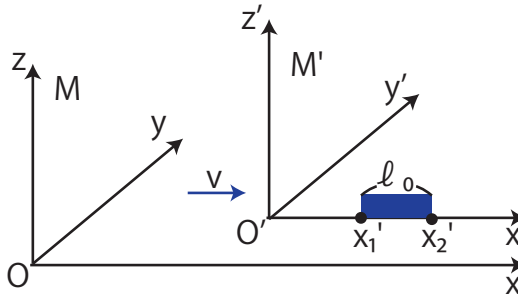


Figure 3.12: 空間の収縮 1

$$x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

より、

$$\begin{aligned} \ell_0 &= x'_2 - x'_1 \\ &= \frac{-\beta ct + x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{-\beta ct + x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

となります。ここで、  $x_2 - x_1$  は  $M$  での棒の長さを表しますので、これを  $\ell$  とおきます。このとき、

$$\begin{aligned} \ell_0 &= \frac{\ell}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \therefore \ell &= \ell_0 \sqrt{1 - \beta^2} < \ell_0 \end{aligned}$$

となります。つまり、慣性系  $M$  から観測した棒の長さ  $l$  は、 $M'$  での長さ  $l_0$  より短いという結論になります。これが、動いている棒の長さが縮むという現象です。例えば、 $v = 0.8c$  のときは、

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - 0.8^2} = \sqrt{0.36} = 0.6$$

となりますから、 $l = 0.6l_0$  となります。  $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c \cong 0.87c$  のときは、

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5$$

となりますから、 $l = 0.5l_0$  となります。棒だけではなく、その入れ物である空間そのものが縮んでいると考えられます。すなわち、動いている空間は収縮すると言えます。(自分が静止している座標系で測定する空間の長さを固有空間といいましょう。この場合、 $l_0$  は  $M'$  に対して固有空間です。) 状況を 2 次元時空図 “空間の収縮 2” で表しておきます。

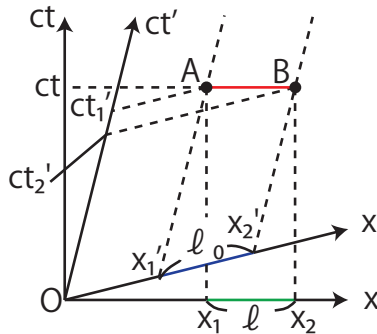


Figure 3.13: 空間の収縮 2

時間の遅れの場合と同様に、特殊相対性原理より、 $M$  と  $M'$  は完全に同等のはずですが、 $M$  に対して、 $M'$  が等速直線運動しているということは、 $M'$  を基準にして、 $M$  が等速直線運動していると考えることもできます。この場合、長さが縮むのは、 $M$  におかれた棒ということになります。これは明らかに上記の長さが縮むのは  $M'$  におかれた棒であるという主張と矛盾しているように思えます。この矛盾を空間のパラドックスといいます。しかし、両方とも正しいのです。立場によって主張が異なるのは、慣性系が完全に同等であることを意味します。 $M$  に対して  $M'$  が等速直線運動していると考えるときは、棒は  $M'$  に対して静止していて、 $M$  に対しては運動しています。逆に、 $M'$  に対して  $M$  が等速直線運動していると考えるときは、棒は  $M$  に対して静止していて、 $M'$  に対しては運動しています。つまり、2つの立場での事象は異なっているのです。このことに注意しながら、ローレンツ逆変換による計算とミンコフスキー時空図を確認しましょう。慣性系  $M'(ct', x')$  に対して、慣性系  $M(ct, x)$  が  $x'$  の負の方向に速さ  $v$  で等速直線運動をしている状況を考えます。 $M$  の

$x$  軸に沿って置かれている長さ  $L_0$  の棒を、 $M'$  において同時刻に観測する場合を考察します。(同時刻の設定方法は、前述のフラッシュを使う方法です。) この場合、棒は  $M$  に対して固定されていますので、 $L_0$  が固有空間の長さになります。  $M$  における棒の両端の  $x$  座標を  $x_3, x_4$  ( $x_4 > x_3$ ) とし、棒の両端の  $x'$  座標を  $M'$  における同時刻  $t'$  のとき、 $x'_3, x'_4$  ( $x'_4 > x'_3$ ) とします。  $M'$  における、この2つの事象を  $C'(ct', x'_3), D'(ct', x'_4)$  とします。 これらを  $M$  から見ると、 $C(ct_3, x_3), D(ct_4, x_4)$  となります。 ここで、ローレンツ逆変換の  $x$  成分の式、

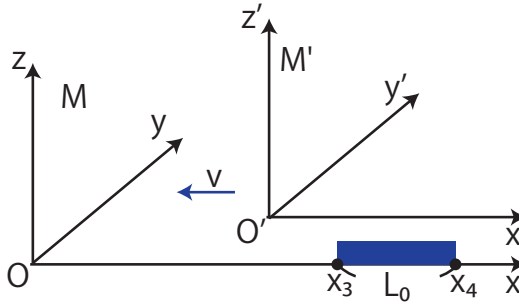


Figure 3.14: 空間の収縮 3

$$x = \frac{\beta ct' + x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

より、

$$\begin{aligned} L_0 &= x_4 - x_3 \\ &= \frac{\beta ct' + x'_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{\beta ct' + x'_3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{x'_4 - x'_3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

となります。ここで、 $x'_4 - x'_3$  は  $M'$  での棒の長さを表しますが、これを  $L$  とおきます。このとき、

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{L}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \therefore L &= L_0 \sqrt{1 - \beta^2} < L_0 \end{aligned}$$

となります。つまり、慣性系  $M'$  から観測した棒の長さ  $L$  は、 $M$  での長さ  $L_0$  より短いという結論になります。この場合の2次元時空図も記載しておきます。事象  $A, B$  と  $C, D$  は違いますので、主張の相違があっても問題はありません。Section 前半の議論で出てきた不等式と比較するため、 $L = \ell_0$  としてみましょう。このとき、

$$\ell < \ell_0 = L < L_0$$

となっていて矛盾していません。

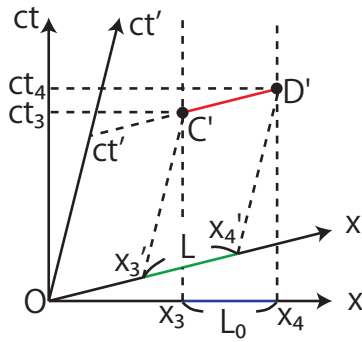


Figure 3.15: 空間の収縮 4

### 3.5 速度の合成則

慣性系間の速度の合成の問題を考えましょう。つまり、慣性系  $M(ct, x)$  に対して、速さ  $v$  で  $x$  方向に等速直線運動する慣性系  $M'(ct', x')$  があり、この  $M'$  に対して速度  $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$  で運動する物体があるとします。このとき、 $M$  に対して物体はどのような合成速度  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  で動くかという問題を取り扱います。この場合、ニュートン力学での結論は、

$$u_x = v + w_x$$

$$u_y = w_y$$

$$u_z = w_z$$

となります。特殊相対性理論の場合、正しい速度の合成則はどのようになるでしょうか？ローレンツ変換によって計算していきましょう。

慣性系  $M'$  に対する物体の速度  $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$  を表しましょう。 $M'$  に対する微小時間  $dt'$  の間に、 $M'$  に対する微小変位を  $(dx', dy', dz')$  とします。このとき、

$$w_x \equiv \frac{dx'}{dt'}$$

$$w_y \equiv \frac{dy'}{dt'}$$

$$w_z \equiv \frac{dz'}{dt'}$$

と定義されます。この微小変位  $(dx', dy', dz')$  を、 $M$  から観測することを考えましょう。 $M$

と  $M'$  の間のローレンツ逆変換の式は次の通りでした.

$$\begin{aligned} ct &= \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x &= \frac{\beta ct' + x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

したがって、これらの微小量は、

$$\begin{aligned} c \cdot dt &= \frac{c \cdot dt' + \beta dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ dx &= \frac{\beta c \cdot dt' + dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ dy &= dy' \\ dz &= dz' \end{aligned}$$

となります。時間成分は、さらに、

$$dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

としておきます。ここで、 $M$  に対する合成速度  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  は、

$$\begin{aligned} u_x &\equiv \frac{dx}{dt} \\ u_y &\equiv \frac{dy}{dt} \\ u_z &\equiv \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

と定義されますから、上の微小量を代入して計算します。  $x$  成分は、

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\frac{\beta c \cdot dt' + dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}}{\frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}} \\ &= \frac{v \cdot dt' + dx'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} \\ &= \frac{v + \frac{dx'}{dt'}}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \end{aligned}$$



ですから,

$$u_x = \frac{v + w_x}{1 + \frac{vw_x}{c^2}} \quad (3.1)$$

が成立します.  $y$  成分は,

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{dy'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} \\ &= \frac{dy' \sqrt{1 - \beta^2}}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2} dy'}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2} w_y}{1 + \frac{vw_x}{c^2}} \end{aligned}$$

と変換されます.  $z$  成分も同様の計算により,

$$u_z = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} w_z}{1 + \frac{vw_x}{c^2}}$$

と変換されることがわかります. ニュートン力学では速度の合成則は  $x$  成分については,  $u_x = v + w_x$  でしたが, 特殊相対性理論では全く異なる結果 (3.1) 式になります. ( $y, z$  成分も変換されます.) この結果を利用すると, 特殊相対性理論においては光速以上の速度で運動する慣性系は存在しないということが, 重要な結論として導かれます. 例えば,  $v = w_x = c$  としてみます. このとき,  $u_x$  は次のように (3.1) 式を用いて計算されます.

$$u_x = \frac{c + c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = c$$

このことは, 速度  $c$  と同じ向きの速度  $c$  を合成すると,  $2c$  ではなく  $c$  となることを意味します. 常識には反しますが, これも特殊相対性理論の一つの結論です. ( $v$  や  $w_x$  が, 光速に比べて無視できる場合は, (3.1) 式の分母第 2 項が 0 になりますので,  $u_x = v + w_x$  というニュートン力学の結論と一致します.)

同時性の問題, 時間の遅れ, 双子のパラドックス, 空間の収縮, 速度の合成則といった特殊相対性理論の結論は受け入れ難いかもしれません. しかし, このような結論が目に見える効果として現れるのは, 運動の速さが光速に対して無視できない程度になった場合です. 例としては, 高エネルギー加速器や宇宙線などが挙げられますが, 特殊相対性理論の結論が正しいことが確認されています.

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

# Chapter 4

## ローレンツ不変性とローレンツ共変性

### 4.1 数学的アナロジー

#### (3次元デカルト座標における回転座標変換)

この Section では数学的な準備のため、特殊相対性理論から少し離れて、3次元空間における簡単な線形代数の復習をしておきます。空間だけの話なので、時間座標は出てきません。あくまで、特殊相対性理論を理解するための、数学的アナロジーとして取り上げます。

デカルト座標の  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸をとり, 任意の3次元座標ベクトル  $(x, y, z)$  をとります。ここで,  $z$  軸を軸にして  $x$  軸,  $y$  軸を反時計回りに  $\theta$  だけ回転させます。そのとき, 新しい座標を  $(x', y', z')$  とすると, 回転前の古い座標  $(x, y, z)$  との間に,

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

の関係があります。(図を見て下さい。) これらを, 行列を使って表すと,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となります。ここで, この関係式を簡略化して表すために表記方法を次のようにします。ま

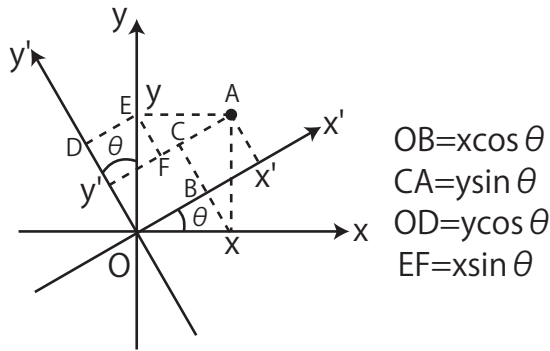


Figure 4.1: 回転座標変換

ず、座標ベクトルを、

$$x^i = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とします。(本 Report “相対性理論” では、アルファベットの  $i, j, k, \ell, m, n$  を添え字として使うときは、通常、1, 2, 3 の値をとることにします。) また、回転を表す行列は、

$$\Lambda_j^i = \begin{pmatrix} \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 \\ \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 \\ \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおきます。このとき、上の座標変換の関係式は、

$$\begin{aligned} x'^1 &= \Lambda_1^1 x^1 + \Lambda_2^1 x^2 + \Lambda_3^1 x^3 \\ x'^2 &= \Lambda_1^2 x^1 + \Lambda_2^2 x^2 + \Lambda_3^2 x^3 \\ x'^3 &= \Lambda_1^3 x^1 + \Lambda_2^3 x^2 + \Lambda_3^3 x^3 \end{aligned}$$

となります。これらの式をまとめて 1 つの式で表すと、

$$x'^i = \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^i x^j$$

となります。なお、 $\Lambda$  行列は、

$$\begin{aligned} \Lambda_1^1 &= \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \Lambda_2^1 &= \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \Lambda_3^1 &= \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} \\ \Lambda_1^2 &= \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \Lambda_2^2 &= \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \Lambda_3^2 &= \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} \\ \Lambda_1^3 &= \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \Lambda_2^3 &= \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \Lambda_3^3 &= \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{aligned}$$

の関係がありますので,

$$\Lambda_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}$$

と表すことができます. 再度, 回転座標変換の式を書くと,

$$x^i = \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^i x^j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^j} x^j$$

とまとめられます.

それでは, 回転の逆変換はどのようになるのでしょうか. 変換の行列は,  $\theta$  を  $-\theta$  に置き換えて,

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります. したがって, 逆変換の関係式は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

です. この逆変換の行列を,

$$\tilde{\Lambda}_j^i = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_1^1 & \tilde{\Lambda}_2^1 & \tilde{\Lambda}_3^1 \\ \tilde{\Lambda}_1^2 & \tilde{\Lambda}_2^2 & \tilde{\Lambda}_3^2 \\ \tilde{\Lambda}_1^3 & \tilde{\Lambda}_2^3 & \tilde{\Lambda}_3^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおきます. このとき,

$$x^1 = \tilde{\Lambda}_1^1 x'^1 + \tilde{\Lambda}_2^1 x'^2 + \tilde{\Lambda}_3^1 x'^3$$

$$x^2 = \tilde{\Lambda}_1^2 x'^1 + \tilde{\Lambda}_2^2 x'^2 + \tilde{\Lambda}_3^2 x'^3$$

$$x^3 = \tilde{\Lambda}_1^3 x'^1 + \tilde{\Lambda}_2^3 x'^2 + \tilde{\Lambda}_3^3 x'^3$$

となります. これらの式をまとめて1つの式で表すと,

$$x^i = \sum_{j=1}^3 \tilde{\Lambda}_j^i x'^j$$

となります. なお,  $\tilde{\Lambda}$  行列は,

$$\tilde{\Lambda}_1^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}$$

$$\tilde{\Lambda}_2^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}$$

$$\tilde{\Lambda}_3^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^3}$$

$$\tilde{\Lambda}_1^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}$$

$$\tilde{\Lambda}_2^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}$$

$$\tilde{\Lambda}_3^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x'^3}$$

$$\tilde{\Lambda}_1^3 = \frac{\partial x^3}{\partial x'^1}$$

$$\tilde{\Lambda}_2^3 = \frac{\partial x^3}{\partial x'^2}$$

$$\tilde{\Lambda}_3^3 = \frac{\partial x^3}{\partial x'^3}$$

の関係がありますので,

$$\tilde{\Lambda}_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$$

と表すことができます。再度, 回転座標逆変換の式を書くと,

$$x^i = \sum_{j=1}^3 \tilde{\Lambda}_j^i x'^j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} x'^j$$

とまとめられます。

$\Lambda$  行列と  $\tilde{\Lambda}$  行列は逆行列の関係にあります。このことは, 直接, 行列を掛け合わせれば確認できます。

$$\sum_{k=1}^3 \Lambda_k^i \tilde{\Lambda}_j^k = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

あるいは, 偏微分の性質を使っても導出できます。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \Lambda_k^i \tilde{\Lambda}_j^k &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \\ &= \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} \\ &= \delta_j^i \end{aligned}$$

ただし, 最後の記号はクロネッカーのデルタで,

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を意味します。

## 4.2 ローレンツ変換の4次元定式化

前の Section と並行して, 4次元の座標変換であるローレンツ変換について数学的に再考してみましょう。ローレンツ変換を再掲すると,

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x' &= \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

であり，ローレンツ逆変換は，

$$\begin{aligned} ct &= \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x &= \frac{\beta ct' + x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

でした．ここで，ローレンツ変換を，行列を使って表すと，

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となります．また，ローレンツ逆変換も，同様に次のように表せます．

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

これらの行列の関係式をシンプルに表す方法を考えましょう．まず，座標ベクトルですが，

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表します．上付きの添え字  $\mu$  は 0, 1, 2, 3 の値をとるのですね．(相対性理論では，特に断りがない限り，ギリシア文字は 0, 1, 2, 3 の値をとります．) このような時間 1 成分と空間 3 成分からなるベクトルを 4 元ベクトルといいます．そして，ローレンツ変換の行列ですが，

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & \Lambda_2^0 & \Lambda_3^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 \\ \Lambda_0^2 & \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 \\ \Lambda_0^3 & \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくことにします。  $\mu$  は行を,  $\nu$  は列を表していて, それぞれ,  $0, 1, 2, 3$  の値をとります。このとき, ローレンツ変換は,

$$\begin{aligned}x'^0 &= \Lambda_0^0 x^0 + \Lambda_1^0 x^1 + \Lambda_2^0 x^2 + \Lambda_3^0 x^3 \\x'^1 &= \Lambda_0^1 x^0 + \Lambda_1^1 x^1 + \Lambda_2^1 x^2 + \Lambda_3^1 x^3 \\x'^2 &= \Lambda_0^2 x^0 + \Lambda_1^2 x^1 + \Lambda_2^2 x^2 + \Lambda_3^2 x^3 \\x'^3 &= \Lambda_0^3 x^0 + \Lambda_1^3 x^1 + \Lambda_2^3 x^2 + \Lambda_3^3 x^3\end{aligned}$$

となりますが, 1つにまとめて,

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu x^\nu$$

となります。ここで, 記号の約束ですが, 同じギリシア文字の添え字が上下に対になって現れたときには, 和の記号を省略できるとします。そして, 和の記号なしで, その同じ添え字について  $0, 1, 2, 3$  の和をとります。この約束をアインシュタインの規約といいます。ですから, この式は,

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$$

と書くことができます。(かなり簡略化してローレンツ変換を表せました。) したがって,  $\Lambda$  行列は次のように表せます。

$$\begin{array}{cccc} \Lambda_0^0 = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \Lambda_1^0 = \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} & \Lambda_2^0 = \frac{\partial x'^0}{\partial x^2} & \Lambda_3^0 = \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} \\ \Lambda_0^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} & \Lambda_1^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \Lambda_2^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \Lambda_3^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} \\ \Lambda_0^2 = \frac{\partial x'^2}{\partial x^0} & \Lambda_1^2 = \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \Lambda_2^2 = \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \Lambda_3^2 = \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} \\ \Lambda_0^3 = \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} & \Lambda_1^3 = \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \Lambda_2^3 = \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \Lambda_3^3 = \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{array}$$

1式にまとめると,

$$\Lambda_\nu^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

となります。ここで, ローレンツ変換をまとめて,

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu \quad (4.1)$$

としておきます。

それでは, ローレンツ逆変換も同じように簡略化して表しておきます。逆変換の行列を,

$$\tilde{\Lambda}_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^0 & \tilde{\Lambda}_1^0 & \tilde{\Lambda}_2^0 & \tilde{\Lambda}_3^0 \\ \tilde{\Lambda}_0^1 & \tilde{\Lambda}_1^1 & \tilde{\Lambda}_2^1 & \tilde{\Lambda}_3^1 \\ \tilde{\Lambda}_0^2 & \tilde{\Lambda}_1^2 & \tilde{\Lambda}_2^2 & \tilde{\Lambda}_3^2 \\ \tilde{\Lambda}_0^3 & \tilde{\Lambda}_1^3 & \tilde{\Lambda}_2^3 & \tilde{\Lambda}_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \sqrt{1-\beta^2} & \sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{1-\beta^2} & \sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



とおきます。このとき、ローレンツ逆変換は、

$$\begin{aligned}x^0 &= \tilde{\Lambda}_0^0 x'^0 + \tilde{\Lambda}_1^0 x'^1 + \tilde{\Lambda}_2^0 x'^2 + \tilde{\Lambda}_3^0 x'^3 \\x^1 &= \tilde{\Lambda}_0^1 x'^0 + \tilde{\Lambda}_1^1 x'^1 + \tilde{\Lambda}_2^1 x'^2 + \tilde{\Lambda}_3^1 x'^3 \\x^2 &= \tilde{\Lambda}_0^2 x'^0 + \tilde{\Lambda}_1^2 x'^1 + \tilde{\Lambda}_2^2 x'^2 + \tilde{\Lambda}_3^2 x'^3 \\x^3 &= \tilde{\Lambda}_0^3 x'^0 + \tilde{\Lambda}_1^3 x'^1 + \tilde{\Lambda}_2^3 x'^2 + \tilde{\Lambda}_3^3 x'^3\end{aligned}$$

となりますので、

$$x^\mu = \tilde{\Lambda}_\nu^\mu x'^\nu$$

と表せます。(ここでも、アインシュタインの規約を使いました。) したがって、 $\tilde{\Lambda}$  行列は次のようになります。

$$\begin{array}{cccc}\tilde{\Lambda}_0^0 = \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} & \tilde{\Lambda}_1^0 = \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} & \tilde{\Lambda}_2^0 = \frac{\partial x^0}{\partial x'^2} & \tilde{\Lambda}_3^0 = \frac{\partial x^0}{\partial x'^3} \\ \tilde{\Lambda}_0^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} & \tilde{\Lambda}_1^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \tilde{\Lambda}_2^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \tilde{\Lambda}_3^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} \\ \tilde{\Lambda}_0^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x'^0} & \tilde{\Lambda}_1^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \tilde{\Lambda}_2^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \tilde{\Lambda}_3^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} \\ \tilde{\Lambda}_0^3 = \frac{\partial x^3}{\partial x'^0} & \tilde{\Lambda}_1^3 = \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} & \tilde{\Lambda}_2^3 = \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} & \tilde{\Lambda}_3^3 = \frac{\partial x^3}{\partial x'^3}\end{array}$$

の関係がありますので、

$$\tilde{\Lambda}_\nu^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$$

となります。ローレンツ逆変換をまとめて、

$$x^\mu = \tilde{\Lambda}_\nu^\mu x'^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} x'^\nu$$

としておきます。

$\Lambda$  行列と  $\tilde{\Lambda}$  行列はお互いに逆行列の関係にあることがわかります。直接、行列を掛け合わせてみて、

$$\Lambda_\lambda^\mu \tilde{\Lambda}_\nu^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と確認することができます。あるいは、偏微分の性質を使っても、証明できます。

$$\begin{aligned}\Lambda_\lambda^\mu \tilde{\Lambda}_\nu^\lambda &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \\ &= \delta_\nu^\mu\end{aligned}$$

ただし,  $\delta_{\nu}^{\mu}$  はクロネッカーのデルタで,

$$\delta = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

と定義されます.

### 4.3 インターバルのローレンツ不変性

インターバル  $s$  の 2 乗は,

$$s^2 \equiv (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

で定義されました. ここで, 反変ベクトルと共変ベクトルの座標ベクトルというものを導入します. 反変ベクトルの座標ベクトルは添え字が上付きと約束し, 今まで取り扱ってきた座標ベクトルを意味します.

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$$

共変ベクトルの座標ベクトルは添え字が下付きと約束し, 今まで取り扱ってきた座標ベクトルの空間成分のみを逆符号とします.

$$x_{\mu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \equiv (ct, -x, -y, -z)$$

このとき, インターバルの 2 乗は,

$$\begin{aligned} s^2 &= x^{\mu} x_{\mu} \\ &= x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 \\ &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned}$$

と表すことができます.  $x^{\mu} x_{\mu}$  のように, ベクトル 2 つの積で添え字が 2 個あっても上下対になっていて和をとる場合は, 縮約といってベクトルの積はスカラーになります. そして, 一般にスカラーはローレンツ変換に対して不変量になります. 今考えているインターバルの 2 乗の量がローレンツ不変量になることは, “ローレンツ変換とミンコフスキー時空” の Chapter で, 直接確認しましたね.

このように, 反変ベクトルと共変ベクトルは添え字の上下が異なり, 空間成分の符号が違います. そこで, この 2 つのベクトルを変換するために計量テンソルと呼ばれる次のテ

ンソルを導入します。

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

この計量テンソルを使うと、反変ベクトルと共変ベクトルの間を変換することができます。

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}x^\nu &= \eta_{\mu 0}x^0 + \eta_{\mu 1}x^1 + \eta_{\mu 2}x^2 + \eta_{\mu 3}x^3 \\ &= (x^0, 0, 0, 0) + (0, -x^1, 0, 0) + (0, 0, -x^2, 0) + (0, 0, 0, -x^3) \\ &= (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \\ &= x_\mu \\ \eta^{\mu\nu}x_\nu &= \eta^{\mu 0}x_0 + \eta^{\mu 1}x_1 + \eta^{\mu 2}x_2 + \eta^{\mu 3}x_3 \\ &= (x_0, 0, 0, 0) + (0, -x_1, 0, 0) + (0, 0, -x_2, 0) + (0, 0, 0, -x_3) \\ &= (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) \\ &= (x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &= x^\mu \end{aligned}$$

このとき、インターバルの 2 乗は、

$$\begin{aligned} s^2 &= \eta^{\mu\nu}x_\mu x_\nu = x^\nu x_\nu \\ &= \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x_\nu x^\nu \end{aligned}$$

と表すことができます。そして、インターバルの 2 乗の変換後のダッシュの付いた量は、

$$\begin{aligned} s'^2 &= \eta_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu}\Lambda_\lambda^\mu \Lambda_\rho^\nu x^\lambda x^\rho \end{aligned}$$

となります。ここで、 $\mu$  を  $\lambda$  に、 $\nu$  を  $\rho$  に、 $\lambda$  を  $\mu$  に、 $\rho$  を  $\nu$  にそっくりと入れ替えても問題ありません。(アインシュタインの規約で、上下対になって縮約されている添え字は他のギリシア文字とそっくり入れ替えても、結局 0, 1, 2, 3 と和をとるだけなので同じこととなります。)

$$\begin{aligned} s'^2 &= \eta_{\mu\nu}\Lambda_\lambda^\mu \Lambda_\rho^\nu x^\lambda x^\rho \\ &= \eta_{\lambda\rho}\Lambda_\mu^\lambda \Lambda_\nu^\rho x^\mu x^\nu \end{aligned}$$

インターバルの 2 乗のローレンツ不変性より、最後の式の量は、

$$s'^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$$

に等しくなります。したがって、

$$\eta_{\lambda\rho}\Lambda_{\mu}^{\lambda}\Lambda_{\nu}^{\rho} = \eta_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

という等式が成立します。一般に、(4.2) 式を満たす行列  $\Lambda$  で変換する座標変換はインターバルを不変に保つことができます。この座標変換を一般ローレンツ変換と言います。一般ローレンツ変換では座標が等速直線運動する方向は任意に選べます。それに対して、今までの  $x$  方向に等速直線運動している特別な場合のローレンツ変換を特殊ローレンツ変換と言います。

反変ベクトルの座標ベクトルは、

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$$

と表され、変換式 (4.1) 式、

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu}$$

が成立しました。一方、共変ベクトルの座標ベクトルは、

$$\begin{aligned} x_{\mu} &= (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \equiv (ct, -x, -y, -z) \\ &= \eta_{\mu\nu} x^{\nu} \end{aligned}$$

と表されましたが、座標変換はどのようになるのでしょうか？ まず、次の計算を確認します。

$$\begin{aligned} x'_{\mu} &= \eta_{\mu\nu} x'^{\nu} \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\lambda}^{\nu} x^{\lambda} \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\lambda}^{\nu} \eta^{\lambda\rho} x_{\rho} \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで、 $\eta_{\mu\nu} \Lambda_{\lambda}^{\nu} \eta^{\lambda\rho}$  が  $\Lambda$  の逆行列  $\tilde{\Lambda}$  と同定できることは、次のように確認できます。この量に  $\Lambda_{\sigma}^{\mu}$  をかけて  $\mu$  について縮約をとった量を  $P$  とおくと、

$$P_{\sigma}^{\rho} = \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\lambda}^{\nu} \eta^{\lambda\rho} \cdot \Lambda_{\sigma}^{\mu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\lambda}^{\nu} \cdot \eta^{\lambda\rho}$$

となります。少し上の (4.2) 式、

$$\eta_{\lambda\rho} \Lambda_{\mu}^{\lambda} \Lambda_{\nu}^{\rho} = \eta_{\mu\nu}$$

より、

$$\begin{aligned} P_{\sigma}^{\rho} &= \eta_{\sigma\lambda} \cdot \eta^{\lambda\rho} \\ &= \delta_{\sigma}^{\rho} \end{aligned}$$

です。よって、 $\eta_{\mu\nu}\Lambda_x^\nu\eta^{4\rho}$  は  $\Lambda$  の逆行列  $\tilde{\Lambda}_\mu^\rho$  となります。(4.3) 式より、

$$x'_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu^\rho x_\rho$$

となります。縮約をとっている  $\rho$  を  $\nu$  に置き換えて、共変ベクトルの変換性は、

$$x'_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu^\nu x_\nu$$

となります。さらに、

$$\tilde{\Lambda}_\nu^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$$

の関係がありましたので、

$$x'_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu^\nu x_\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} x_\nu \quad (4.4)$$

とまとめられます。この (4.4) 式は、共変ベクトルの座標ベクトルのローレンツ変換です。

## 4.4 スカラー，ベクトル，テンソル

今までの Section では、座標ベクトルと座標変換であるローレンツ変換について議論してきましたが、物理量を表す 4 元ベクトルといわれる量を一般的に導入しましょう。(座標ベクトルも 4 元ベクトルに含まれます。) まず、一般的に反変ベクトルを、

$$A^\mu \equiv (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

とします。そして、反変ベクトルの座標ベクトルのローレンツ変換 (4.1) 式、

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu$$

と同様に、

$$A'^\mu = \Lambda_\nu^\mu A^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (4.5)$$

と変換するとし、この変換によって反変ベクトルを定義します。次に共変ベクトルを、

$$A_\mu \equiv (A_0, A_1, A_2, A_3) \equiv (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$$

とします。そして、共変ベクトルの座標ベクトルのローレンツ変換 (4.4) 式、

$$x'_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu^\nu x_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'^\mu} x_\nu$$

と同様に、

$$A'_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu^\nu A_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu \quad (4.6)$$

と変換するとし、この変換によって共変ベクトルを定義します。

反変ベクトル 1 個と共変ベクトル 1 個を掛け合わせ、同じ添え字にして縮約をとった量をスカラーといいます。例えば、

$$A^\mu A_\mu, P_\nu P^\nu, \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

等です。スカラーは全ての添え字が縮約をとられているので、実質添え字が 0 で、ローレンツ不変量になります。反変ベクトルの座標ベクトルと共変ベクトルの座標ベクトルからできているインターバルもスカラーの具体例です。

反変ベクトルを 2 つ掛け合わせてできた量を 2 階反変テンソルといいます。式で表すと、

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$$

のようになります。このテンソルの変換は、

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} T^{\lambda\rho}$$

のようになります。一方、共変ベクトルを 2 つ掛け合わせてできた量を 2 階共変テンソルといいます。式で表すと、

$$T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$$

のようになります。このテンソルの変換は、

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} T_{\lambda\rho}$$

のようになります。

反変成分が上付き、共変成分が下付きなのですが、計量テンソルによって上付きと下付きを入れ替えることができます。いくつか例をあげておきます。

$$\eta^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu$$

$$\eta_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu} = T_\mu^\nu$$

$$\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} T_{\lambda\rho} = T^{\mu\nu}$$

2 番目の例のように、上付きの添え字と下付きの添え字が混ざっているテンソルを混合テンソルと言います。

## 4.5 ローレンツ共変性

ここで、特殊相対性原理、

- “物理法則は全ての慣性系において、同じ形式で表現されます。”

の要請を満たす物理学を構築することを考えましょう。一般に、物理法則は幾つかの物理量を結ぶ方程式の関係で表現されます。物理法則を表現する方程式がローレンツ変換のもとで同じ形式で表されれば要請は満足されていることとなります。方程式がローレンツ変換のもとで同じ形式になる性質をローレンツ共変性といいます。方程式がローレンツ共変性を備えていれば特殊相対性原理が満たされることとなります。

特殊相対性理論において、物理量は4元ベクトル、すなわち反変ベクトル、または共変ベクトルで表されるものでした。反変ベクトルで表された物理量からなる物理法則を、慣性系  $M(ct, x, y, z)$  において、次のように表します。

$$A^\mu = 0$$

一般に、この式の左辺は複数の項からなります。ここで、慣性系  $M(ct, x, y, z)$  から  $M'(ct', x', y', z')$  へ座標がローレンツ変換したとき、 $M'(ct', x', y', z')$  において物理法則が次の形式になれば、ローレンツ共変性が満たされていることとなります。

$$A'^\mu = 0$$

この式の導出は次のように簡潔に実行されます。

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \cdot 0 = 0$$

以上のことをまとめて、次のように表現しておきます。

$$A^\mu = 0 \Rightarrow A'^\mu = 0 \quad (4.7)$$

すなわち、物理法則を表す方程式が反変ベクトルで構成されているとき、方程式はローレンツ共変性を満たし、特殊相対性原理の要請に従うことが保証されます。

共変ベクトルで表された物理量からなる方程式によって表される物理法則がローレンツ変換のもとに同じ形式で表されることも同様に、次のように簡潔に表現されます。

$$A_\mu = 0 \Rightarrow A'_\mu = 0 \quad (4.8)$$

この式の導出も簡潔にできます。

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \cdot 0 = 0$$

すなわち、物理法則を表す方程式が共変ベクトルで構成されているとき、方程式はローレンツ共変性を満たし、特殊相対性原理の要請に従います。

物理法則が2階反変テンソル、2階共変テンソルで表されても、4元ベクトルと同様にローレンツ共変性を満たすことが保証されています。

$$A^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow A'^{\mu\nu} = 0 \quad (4.9)$$

$$A_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow A'_{\mu\nu} = 0 \quad (4.10)$$

導出は4元ベクトルの場合と全く同様に変換の式から簡潔に実行されます.

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} A^{\lambda\rho} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \cdot 0 = 0$$
$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} A_{\lambda\rho} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \cdot 0 = 0$$

物理法則を表現する方程式が、反変ベクトル、共変ベクトルや2階反変テンソル、2階共変テンソルで記述されていれば、自動的に方程式はローレンツ共変性を満たし、特殊相対性原理が満足されます。次の2つのChapterに渡って、具体的に特殊相対論的電磁気学と特殊相対論的力学について見ていくことにしましょう。

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>



# Chapter 5

## 特殊相対論的電磁気学

### 5.1 マクスウェル電磁気学

マクスウェル電磁気学の根幹をなすものは、次の4式からなるマクスウェル方程式でした。

$$\nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{\rho(t, \vec{x})}{\epsilon_0} \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0 \quad (5.2)$$

$$\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}(t, \vec{x}) \quad (5.3)$$

$$\nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} = 0 \quad (5.4)$$

これらの方程式から光速  $c$  が計算されました。その光速の値  $c$  は唯一のもので、この事実はガリレイ変換に矛盾します。しかし、矛盾してよいのです。特殊相対性理論においては、ガリレイの相対性原理は古い理論としての位置付けになるのです。一方、マクスウェル方程式はローレンツ変換のもとで共変です。従って、マクスウェル電磁気学は修正することなく、本質的にそのまま特殊相対論的であるといえるのです。ただし、ローレンツ共変性が一目で明らかになるように、4次元的な形式に書き換える必要があります。(修正ではありません書き換えです。本質は変わりません。) 特殊相対論的電磁気学を構築するため、この書き換えられた理論を次の Section で見ていきましょう。

## 5.2 マクスウェル電磁気学の特殊相対論的書き換え

まず、最初にベクトルポテンシャル  $\vec{A}(t, \vec{x})$  とスカラーポテンシャル  $\phi(t, \vec{x})$  の定義から見ていきましょう。すなわち、

$$\begin{aligned}\vec{B}(t, \vec{x}) &= \nabla \times \vec{A}(t, \vec{x}) \\ \vec{E}(t, \vec{x}) &= -\nabla\phi(t, \vec{x}) - \frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t}\end{aligned}$$

の式で定義します。このとき、マクスウェル方程式の (5.2) 式と (5.4) 式は自動的に成立することが、次のように確かめられます。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) &= \nabla \cdot \{\nabla \times \vec{A}(t, \vec{x})\} = 0 \\ \nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t} &= \nabla \times \{-\nabla\phi(t, \vec{x}) - \frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t}\} + \frac{\partial}{\partial t}\{\nabla \times \vec{A}(t, \vec{x})\} = -\nabla \times \{\nabla\phi(t, \vec{x})\} = 0\end{aligned}$$

いずれの変形にも、最後にベクトル解析の公式を使用しました。これらのポテンシャルから 4 元ベクトルを構成します。

$$\begin{aligned}A^\mu(t, \vec{x}) &\equiv \left(\frac{\phi(t, \vec{x})}{c}, A_x(t, \vec{x}), A_y(t, \vec{x}), A_z(t, \vec{x})\right) \\ A_\mu(t, \vec{x}) &\equiv \left(\frac{\phi(t, \vec{x})}{c}, -A_x(t, \vec{x}), -A_y(t, \vec{x}), -A_z(t, \vec{x})\right)\end{aligned}$$

さらに、4 元電流密度ベクトルと 4 次元の微分演算子を、次のように定義します。

$$\begin{aligned}j^\mu(t, \vec{x}) &\equiv (c\rho(t, \vec{x}), j_x(t, \vec{x}), j_y(t, \vec{x}), j_z(t, \vec{x})) \\ j_\mu(t, \vec{x}) &\equiv (c\rho(t, \vec{x}), -j_x(t, \vec{x}), -j_y(t, \vec{x}), -j_z(t, \vec{x})) \\ \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

さらに、2 階反変テンソルを定義します。

$$\boxed{F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \quad (5.5)$$

右辺を計算します。

$$\begin{aligned}
 F^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} \partial^0 A^0 - \partial^0 A^0 & \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 & \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0 & \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 \\ \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 & \partial^1 A^1 - \partial^1 A^1 & \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 & \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \\ \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 & \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 & \partial^2 A^2 - \partial^2 A^2 & \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \\ \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 & \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 & \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 & \partial^3 A^3 - \partial^3 A^3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} A_x - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\phi}{c} & \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} A_y - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\phi}{c} & \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} A_z - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\phi}{c} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\phi}{c} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} A_x & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} A_y - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) A_x & -\frac{\partial}{\partial x} A_z - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) A_x \\ -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\phi}{c} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} A_y & -\frac{\partial}{\partial y} A_x - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) A_y & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} A_z - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) A_y \\ -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\phi}{c} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} A_z & -\frac{\partial}{\partial z} A_x - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) A_z & -\frac{\partial}{\partial z} A_y - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) A_z & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

このとき、 $F^{\mu\nu}$  には  $\vec{A}(t, \vec{x})$  と  $\phi(t, \vec{x})$  が含まれていますので、マクスウェル方程式 (5.2) 式と (5.4) 式は自動的に成立します。また、マクスウェル方程式 (5.1) 式と (5.3) 式は次式で表されます。

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu} \quad (5.6)$$

この (5.6) 式が<sup>3</sup>、確かに (5.1) 式と (5.3) 式を表していることを確認しておきます。

$$\begin{aligned}
 \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \partial_0 \cdot 0 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial z} E_z \\
 &= \frac{1}{c} \nabla \cdot \vec{E} \\
 &= \mu_0 j^0 \\
 &= \mu_0 (c\rho)
 \end{aligned}$$

故に、

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{E} &= c^2 \mu_0 \rho \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \mu_0 \rho \\
 &= \frac{\rho}{\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

これは, (5.1) 式です. また,

$$\begin{aligned}
 \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{E_x}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial y} B_z + \frac{\partial}{\partial z} (-B_y) \\
 &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} E_x + (\nabla \times \vec{B})_x \\
 &= \mu_0 j^1 \\
 &= \mu_0 j_x
 \end{aligned}$$

ですから,

$$(\nabla \times \vec{B})_x - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 j_x$$

となります. これは, (5.3) 式の  $x$  成分の式です.  $\nu = 2, 3$  の場合についても, 同様な計算により,  $y, z$  成分の方程式が得られます.

共変ベクトルと共変テンソルについても同様な式が成立します.

$$\boxed{F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu} \quad (5.7)$$

右辺を計算します.

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} \partial_0 A_0 - \partial_0 A_0 & \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 & \partial_0 A_2 - \partial_2 A_0 & \partial_0 A_3 - \partial_3 A_0 \\ \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 & \partial_1 A_1 - \partial_1 A_1 & \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 & \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 \\ \partial_2 A_0 - \partial_0 A_2 & \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2 & \partial_2 A_2 - \partial_2 A_2 & \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ \partial_3 A_0 - \partial_0 A_3 & \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 & \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 & \partial_3 A_3 - \partial_3 A_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (-A_x) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\phi}{c} & \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (-A_y) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\phi}{c} & \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (-A_z) - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\phi}{c} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\phi}{c} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (-A_x) & 0 & \frac{\partial}{\partial x} (-A_y) - \frac{\partial}{\partial y} (-A_x) & \frac{\partial}{\partial x} (-A_z) - \frac{\partial}{\partial z} (-A_x) \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\phi}{c} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (-A_y) & \frac{\partial}{\partial y} (-A_x) - \frac{\partial}{\partial x} (-A_y) & 0 & \frac{\partial}{\partial y} (-A_z) - \frac{\partial}{\partial z} (-A_y) \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\phi}{c} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (-A_z) & \frac{\partial}{\partial z} (-A_x) - \frac{\partial}{\partial x} (-A_z) & \frac{\partial}{\partial z} (-A_y) - \frac{\partial}{\partial y} (-A_z) & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

このとき,  $F_{\mu\nu}$  には  $\vec{A}(t, \vec{x})$  と  $\phi(t, \vec{x})$  が含まれていますので, マクスウェル方程式 (5.2) 式と (5.4) 式は自動的に成立します. また, マクスウェル方程式 (5.1) 式と (5.3) 式は次式で表されます.

$$\boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\nu} \quad (5.8)$$

この (5.8) 式が, 確かに (5.1) 式と (5.3) 式を表していることを確認しておきます.

$$\begin{aligned}\partial^0 F_{00} + \partial^1 F_{10} + \partial^2 F_{20} + \partial^3 F_{30} &= \partial^0 \cdot 0 + \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{E_x}{c}\right) + \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{E_y}{c}\right) + \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-\frac{E_z}{c}\right) \\ &= \frac{1}{c} \nabla \cdot \vec{E} \\ &= \mu_0 j_0 \\ &= \mu_0 (c\rho)\end{aligned}$$

故に,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= c^2 \mu_0 \rho \\ &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \mu_0 \rho \\ &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

これは, (5.1) 式です. また,

$$\begin{aligned}\partial^0 F_{01} + \partial^1 F_{11} + \partial^2 F_{21} + \partial^3 F_{31} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E_x}{c} + \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) B_z + \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) (-B_y) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} E_x - (\nabla \times \vec{B})_x \\ &= \mu_0 j_1 \\ &= -\mu_0 j_x\end{aligned}$$

ですから,

$$(\nabla \times \vec{B})_x - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 j_x$$

となります. これは, (5.3) 式の  $x$  成分の式です.  $\nu = 2, 3$  の場合についても, 同様な計算により,  $y, z$  成分の方程式が得られます.

“ローレンツ不変性とローレンツ共変性”の Chapter での議論から理解されるように, 4元ベクトルで表されるマクスウェル方程式 (5.6) 式と (5.8) 式は, 明白なローレンツ共変性をもっています. 従って, この Chapter の最初に述べたように, マクスウェル電磁気学は特殊相対論的です. そして, “特殊相対性原理と光速不変の原理”の Chapter で見たように, マクスウェル方程式から光速が導出されるので, 光速は座標系に依存しません. 故に, 光速不変の原理が成立することが保証されたのです.

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>

# Chapter 6

## 特殊相対論的力学

### 6.1 ニュートン力学

ニュートン力学の根幹を成す方程式は、次の運動方程式です。

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}$$

運動方程式はガリレイ変換、

$$t' = t$$

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

のもとで共変でした。つまり、

$$m \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2} = \vec{F}'$$

が成立しました。一方、運動方程式はローレンツ変換のもとで共変ではありません。従って、力学は特殊相対性原理の要請を満たし、ローレンツ変換に対して共変であるように、修正しなければなりません。(単なる変形ではなく、理論をつくり直すのです。) ローレンツ共変性が明白に表されるような力学を構築するためには、4次元的に定式化する必要があります。

## 6.2 固有時間

“特殊相対性理論の世界”の Chapter で固有時間という概念を導入しました。固有時間とは、ある慣性系に対して静止している時計によって観測される時間で、その慣性系を等速直線運動していると観測する慣性系で計る時間よりもゆっくりと経過しました。ある慣性系に乗り込んだとき、無限小インターバルの 4 乗の式、

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

において、

$$dt = d\tau$$

$$dx = dy = dz = 0$$

が成立します。(ただし、 $\tau$  (タウ) は固有時間を強調して表しています。) 従って、

$$ds^2 = c^2 d\tau^2$$

が成り立ちます。また、次の関係式が成立します。

$$d\tau' = dt \sqrt{1 - \beta^2}$$

ただし、慣性系  $M$  に対して等速直線運動している慣性系  $M'$  を考え、 $M'$  に対する固有時間を問題にしています。導出は次の通りです。

$$\begin{aligned} ds'^2 &= ds^2 \\ \therefore c^2 d\tau'^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ \therefore d\tau'^2 &= dt^2 \left( 1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) \\ \therefore d\tau'^2 &= dt^2 (1 - \beta^2) \\ \therefore d\tau' &= dt \sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned}$$

(証明終.)

## 6.3 特殊相対論的力学のローレンツ共変性

固有時間を利用して、4 元速度ベクトルを定義します。

$$\begin{aligned} u^\mu &\equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left( \frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau} \right) \\ u_\mu &\equiv \frac{dx_\mu}{d\tau} = \left( \frac{dx^0}{d\tau}, -\frac{dx^1}{d\tau}, -\frac{dx^2}{d\tau}, -\frac{dx^3}{d\tau} \right) \end{aligned}$$

この4元速度ベクトルを使って、4元運動量ベクトルを定義します。

$$p^\mu \equiv mu^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$p_\mu \equiv mu_\mu = m \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

さらに、4元力を次のように表しておきます。

$$f^\mu \equiv (0, f^1, f^2, f^3) = (0, f_x, f_y, f_z)$$

$$f_\mu \equiv (0, f_1, f_2, f_3) = (0, -f_x, -f_y, -f_z)$$

このとき、運動方程式は次のように修正されます。

$$m \frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu$$

$$m \frac{dp_\mu}{d\tau} = f_\mu$$

このように、運動方程式は4元ベクトルで表せました。従って、明らかなローレンツ共変性をもつことになります。これで、ニュートン力学は特殊相対性原理の要請を満たすように修正されたことになります。

## 6.4 ローレンツ不変量

一般に、ある変換に対して物理量が変化しないとき、物理量是不変性をもつといいます。ローレンツ不変量として、2つの4元運動量ベクトルの縮約からつくられる量を取り上げます。

$$p^\mu p_\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot m \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

$$= m^2 \frac{ds^2}{d\tau^2}$$

$$= m^2 \frac{c^2 d\tau^2}{d\tau^2}$$

$$= m^2 c^2$$

故に、

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \tag{6.1}$$

が成立します。また、4元運動量の第0成分でエネルギーを定義します。

$$E \equiv cp^0$$



このとき, (6.1) 式より,

$$p^\mu p_\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2 c^2$$

となります. 故に,

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \quad (6.2)$$

が成立します. 特に, (6.2) 式で  $p = 0$  を代入すると, 有名な静止エネルギーの式,

$$E = mc^2 \quad (6.3)$$

が成立します. (6.2) 式を変形すると,

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \\ &= mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 c^2} + \dots\right) \\ &= mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) \\ &= mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \dots \end{aligned}$$

となりますが, 第1項が静止エネルギーで, 第2項がニュートン力学の運動エネルギーを表します. (6.3) 式は, 質量はエネルギーであるという意味をもち, 原子力エネルギー等に 응용されています.

J Simplicity HOME

<http://www.jsimplicity.com/>